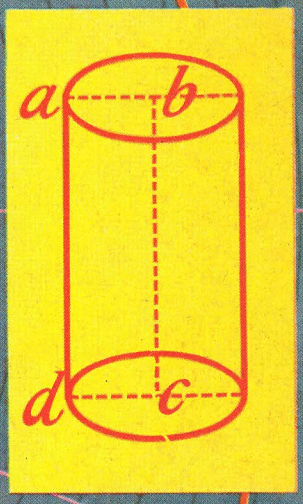
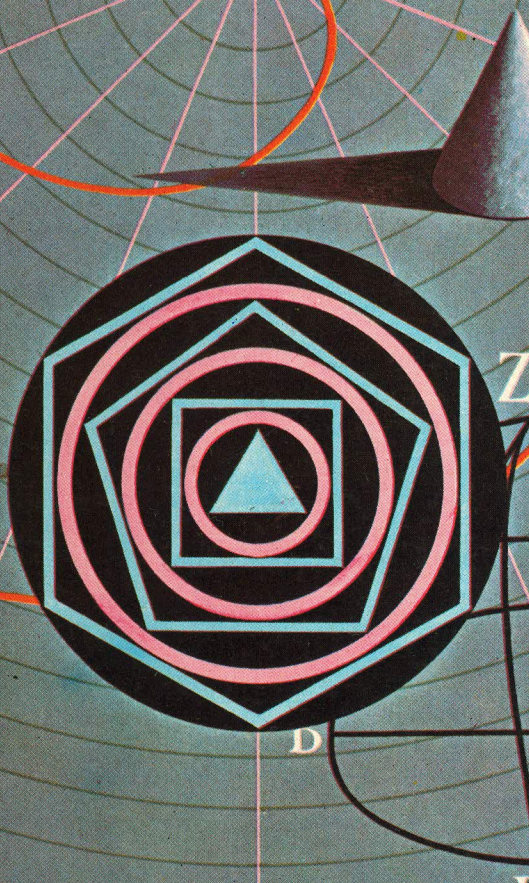
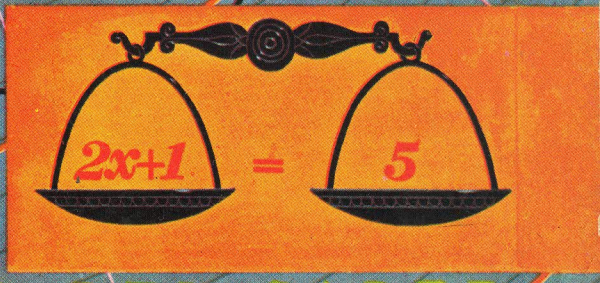
Nº 10

MATEMÁTICAS

La historia de los números, de los símbolos y del espacio







LIBROS DE ORO DEL SABER

MATEMÁTICAS

LA HISTORIA DE LOS NÚMEROS, LOS SÍMBOLOS Y EL ESPACIO

Por IRVING ADLER *Ilustraciones de* LOWELL HESS

Título de este libro en inglés: MATHEMATICS

Traducción de TOMÁS R. COUTO

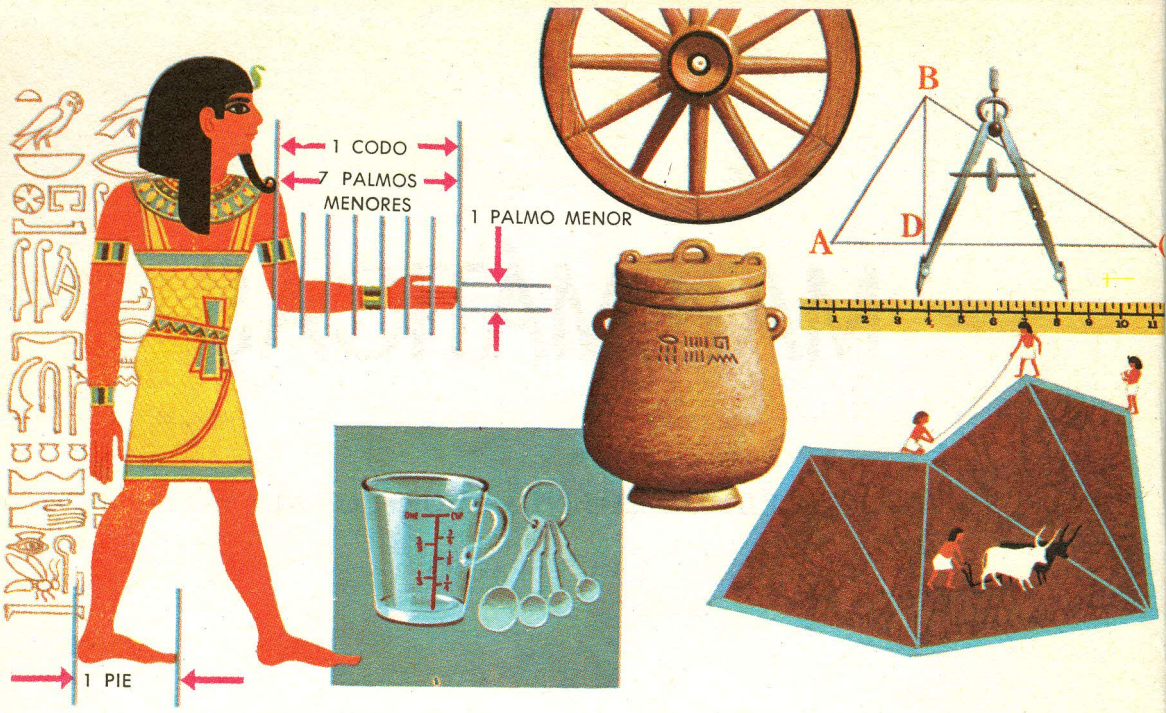
ORGANIZACION EDITORIAL NOVARO, S.A.

MÉXICO, D.F. (México) • BARCELONA (España) • BOGOTA (Colombia) • LIMA (Perú) • SANTIAGO (Chile)

Publicado por *Organización Editorial Novaro, S.A.*, Calle 5, Nº 12, Naucalpan de Juárez, Estado de México, por arreglo exclusivo con *Western Publishing Company, Inc.*, de los E.U.A. Prohibida la reproducción total o parcial. Esta octava edición de 10,000 ejemplares se terminó de imprimir en los talleres de la propia Editorial, en la misma dirección, el 28 de febrero de 1975.

El emblema es marca registrada de Organización Editorial Novaro, S.A.

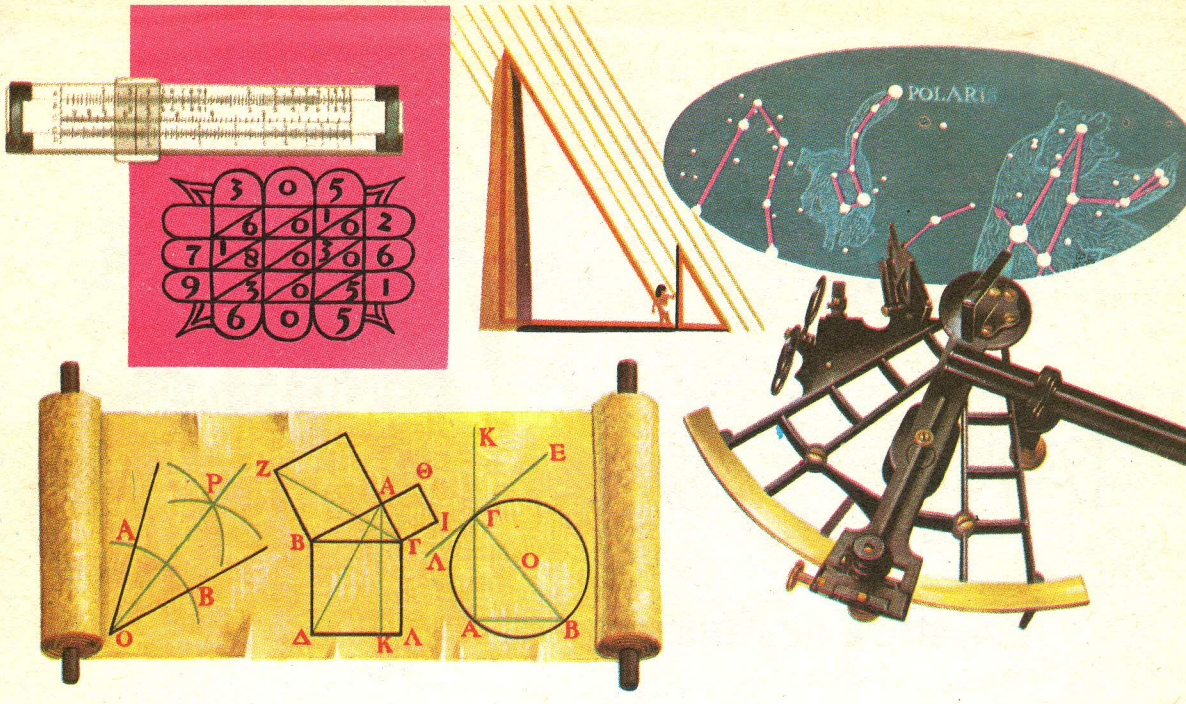
© 1975, 1972, 1971, 1970, 1967, 1965, por Western Publishing Company, Inc. Derechos mundiales reservados.



Las Matemáticas

Las matemáticas constituyen una ciencia que nos enseña a pensar detenidamente en los números y en el espacio. Nos ayuda a llevar la cuenta en los deportes, a medir el área de un piso, a calcular los impuestos que debemos pagar, y a decidirnos a hacer una compra ventajosa. De ellas se sirve el ingeniero para diseñar una máquina. Tanto en el trabajo como en el juego, a menudo tenemos que responder a preguntas como: *¿cuántos?*, *¿de qué tamaño?*, *¿a qué distancia?* Para contestar a estas preguntas, es necesario emplear números; debemos saber cómo se relacionan los números entre sí, y cómo encajan unas con otras las distintas partes de un espacio. Para tener la certeza de que nuestras respuestas son las correctas, tratamos de pensar ordenada y cuidadosamente; al hacer todo esto, empleamos las matemáticas.

En los remotos días en que los hombres obtenían su alimento únicamente de la caza y de la recolección de frutos y bayas, surgió la dificultad de cómo llevar un registro de sus provisiones. Contar, medir y calcular fueron operaciones más importantes, a medida que los hombres primitivos se fueron convirtiendo en agricultores y pastores, pues tenían que hacer la medición de sus tierras y el recuento de los animales de su rebaño. Al empezar a construir presas y canales de irrigación, tuvieron que calcular la cantidad de tierra que tenían que



Los antiguos mercaderes, constructores y navegantes, empleaban las matemáticas para resolver sus problemas

remover y cuántas piedras y ladrillos habría que colocar. Los capataces tenían que saber de antemano cuánta comida habría que almacenar para los trabajadores.

Los carpinteros y los albañiles tuvieron que hacer cálculos y mediciones al construir habitaciones para el pueblo, palacios para sus gobernantes y grandes tumbas en forma de pirámides para sus reyes.

Al surgir el comercio, los mercaderes tuvieron que medir y pesar sus artículos, ponerles precio, calcular su costo y sus ganancias.

Los recaudadores de impuestos necesitaron fijar las tasas y llevar registros. Para realizar todas estas actividades, el hombre inventó la *aritmética*, que es el estudio de los números, y la *geometría*, que estudia el espacio.

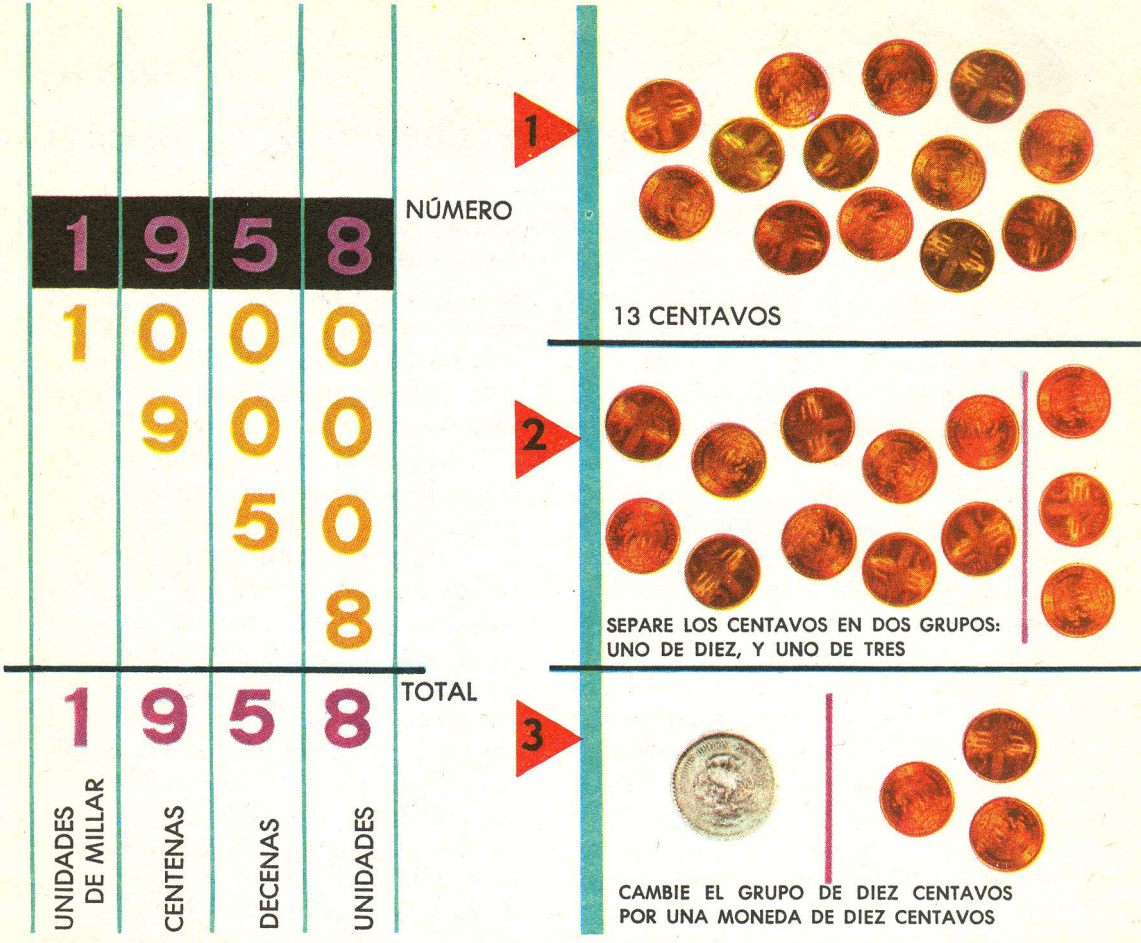
Para predecir los cambios de estación, los sacerdotes estudiaban los movimientos del Sol, la Luna y las estrellas. Los navegantes también observaban el firmamento, guiándose por la posición de los astros. Y para ayudar a estos hombres en sus tareas, se inventó la *trigonometría*, que es el estudio de la relación entre las distancias y las direcciones.

Al extenderse el comercio por todo el mundo, tenían que repetirse a menudo los mismos tipos de cálculos, por lo cual, para ahorrar tiempo, los matemáticos establecieron reglas para efectuarlos y métodos para resolver muchos problemas en forma rápida; tales fueron las bases del *álgebra*.

Escritura de Números

Los hombres han empleado los símbolos numéricos escritos desde hace siete mil años, aproximadamente. Con el transcurso del tiempo, inventaron nuevos y mejores métodos de escribir los números. Al principio, los representaban por medio de incisiones en pedazos de madera, o de líneas dibujadas en el suelo. Todavía utilizamos este sistema cuando escribimos los numerales romanos I, II y III. También encontramos estas figu-

EGIPCIOS	I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII	∩	𓍢	𓆼
BABILÓNICOS	𒐕	𒐖	𒐗	𒐘	𒐙	𒐚	𒐛	𒐜	𒐝	𒌋		
ROMANOS (Primitivos)	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	C	CIↃ
CHINOS	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千
INDOSTANOS	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०		
MAYAS	•	••	•••	••••	—	•̲	••̲	•••̲	••••̲	=		
ARÁBIGOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000



En los números arábigos mayores de 9, el valor de cada dígito depende de su posición

ras, aunque ya transformadas, en los números arábigos 2 y 3. Empezaron a usarse como conjuntos de rayitas separadas. Posteriormente, al escribirse las rayitas rápidamente, se unieron en diferentes símbolos.

La numeración arábiga consta sólo de diez símbolos: los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; pero con estos diez dígitos, podemos formar cualquier número. Lo hacemos separando las cifras grandes en grupos, tal como separamos las cantidades de dinero. Por ejemplo, podemos separar trece centavos en dos grupos: uno de diez y otro de tres. Podemos cambiar los diez centavos por una moneda de diez centavos. En tal forma, tendremos *una* moneda de diez centavos y *tres* monedas de un centavo. Y esta cantidad la representamos con la cifra 13. El 1 escrito en el segundo lugar a partir de la derecha, representa un grupo de diez, así como una moneda de diez centavos representa un conjunto de diez monedas de un centavo.

De igual modo, un número escrito en el tercer lugar a partir de la derecha representa conjuntos de cientos; el cuarto lugar, grupos de millares, etc.

2 3 5 7 Números que no se Pueden Descomponer

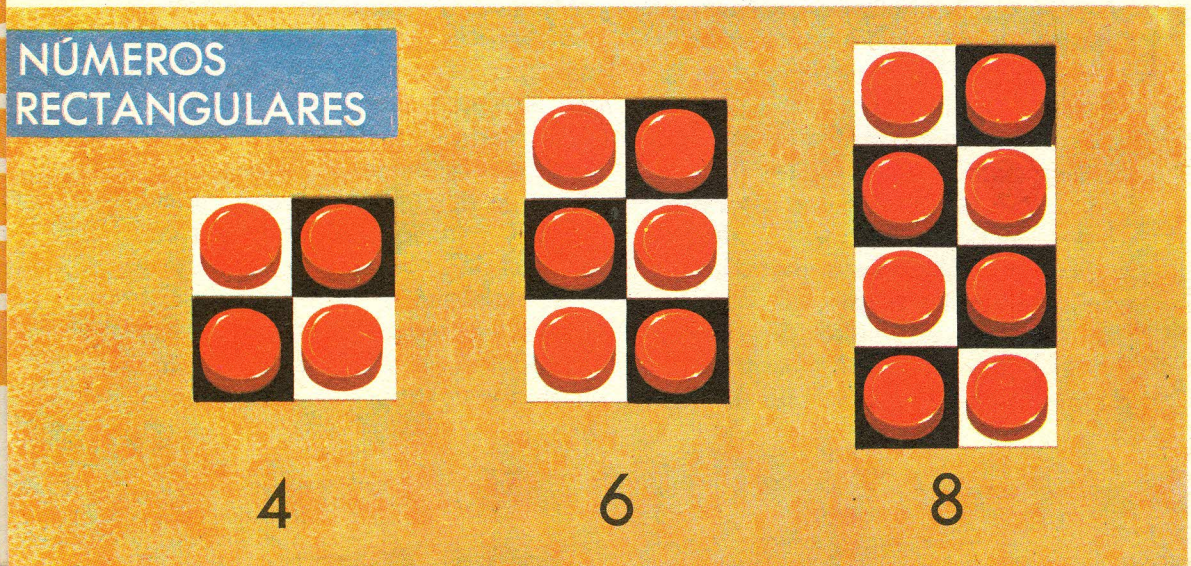
Hagamos una representación objetiva de cualquier número entero empleando hileras de fichas. Para hacer esto, hay que emplear tantas fichas como unidades tenga el número.

Una hilera de cuatro fichas puede separarse en dos hileras de dos fichas cada una. Si colocamos estas dos hileras una debajo de la otra, las fichas formarán un rectángulo, de igual modo, se pueden formar rectángulos con 6, 8, 9 ó 10 fichas. Por esto, llamamos *números rectangulares* a estos números. El rectángulo que se puede formar con el número diez tendrá dos hileras de cinco fichas. Observemos que $2 \times 5 = 10$. *Todos los números rectangulares son el producto de dos o más números más pequeños.*

Pero hay algunos números que no podemos descomponer de esta manera. Ejemplo: no es posible hacer que siete fichas formen un rectángulo. Se pueden distribuir las fichas en siete hileras de una ficha cada una, hasta formar una hilera o una columna de siete fichas. El número 7 no es un número rectangular. Los números que no pueden descomponerse de manera que formen rectángulos, se llaman *números primos.*

Existe un método sencillo para determinar si un número es rectangular o primo. Este método recibe el nombre de *Criba de Eratóstenes*, en honor del matemático griego que inventó el sistema dos siglos antes del nacimiento de Jesucristo. Imaginemos todos los números enteros, a partir del dos, arreglados en una hilera, de menor a mayor y en orden progresivo. El número dos, que encabeza la hilera, es un número primo. Ahora, contemos de dos en dos y tachemos cada número que obtengamos en esta forma, descartando así el dos y todos sus múltiplos. El 4, el 6, el 8, etc., serán números rectangulares. De los núme-

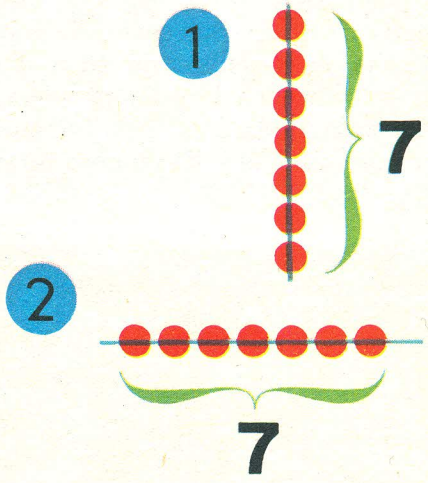
Un número "rectangular", o no primo, siempre es el producto de números más pequeños



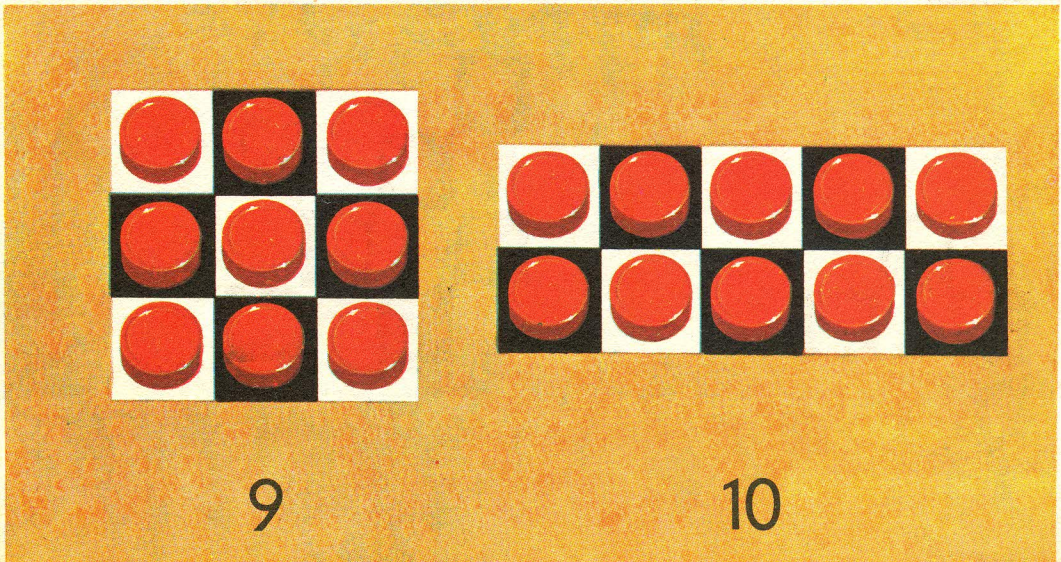
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
CUENTE DE DOS EN DOS	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17
CUENTE DE TRES EN TRES		3		5		7		~~9~~		11		13		~~15~~		17
CUENTE DE CINCO EN CINCO				5		7				11		13				17
CUENTE DE SIETE EN SIETE						7				11		13				17

Mediante la criba de Eratóstenes, se pueden determinar los números primos

ros que no hemos tachado, el tres encabeza la lista, por lo que éste será el número primo que sigue al dos. Luego, tacharemos los números que vayamos obteniendo al contar de tres en tres. Se obtendrán así números enteros como 9 y 15, con los que se pueden formar rectángulos de tres hileras. El número que encabeza ahora la lista es el cinco, el cual es el tercer número primo. Si continuamos tachando de esta manera, obtendremos los múltiplos de cada uno de los números primos, y después de haber descartado cada familia de números, el número que encabece la lista será el siguiente número primo.



Los números primos no se pueden expresar como el producto de números más pequeños

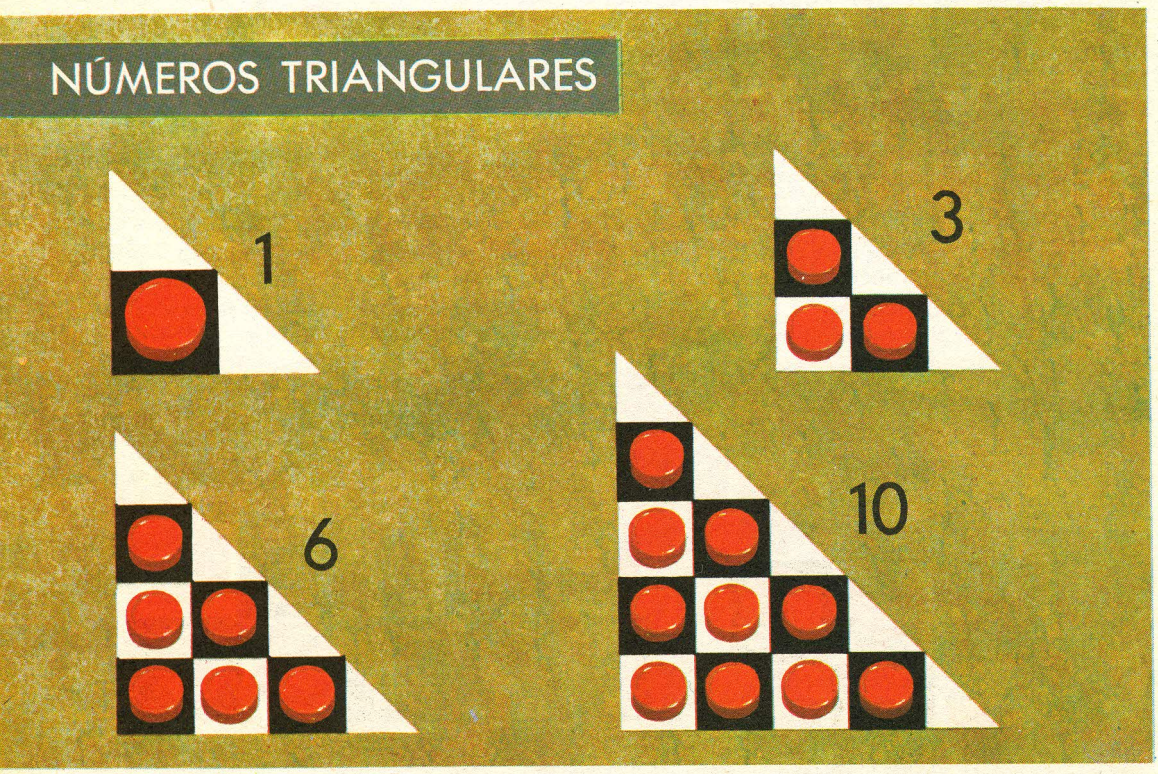


Las Formas de los Números

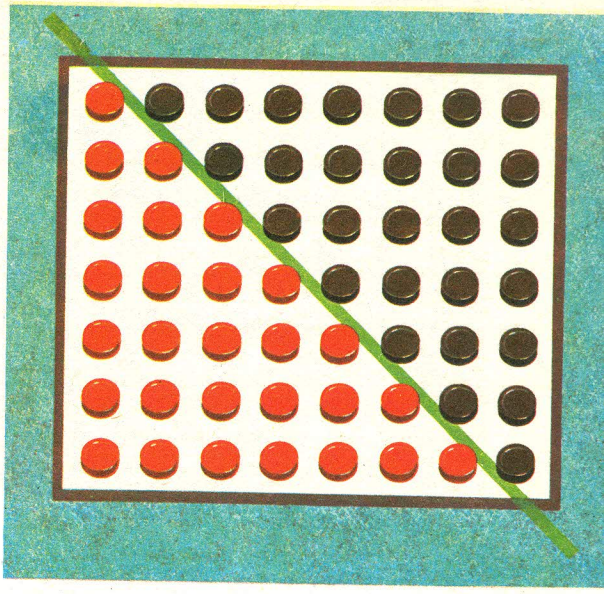
Los números, como las personas, tienen variadas formas. Algunos números son rectangulares; otros forman triángulos, cuadrados o cubos.

NÚMEROS TRIANGULARES

Se pueden encontrar números que forman triángulos colocando hileras de fichas, unas debajo de otras. Se pone una ficha en la primera hilera, dos en la segunda, tres en la tercera, y así sucesivamente. El número total recibe el nombre de número triangular. Los primeros cuatro números triangulares son: el 1, el 3, el 6 y el 10. ¿Cuál es el séptimo número triangular? Una de las maneras de saberlo, consiste en formar el séptimo triángulo y contar el número de fichas que contiene. Pero existe un método simplificado que podemos aplicar. El grabado de la página derecha muestra el séptimo triángulo, con otro similar invertido. Los dos triángulos



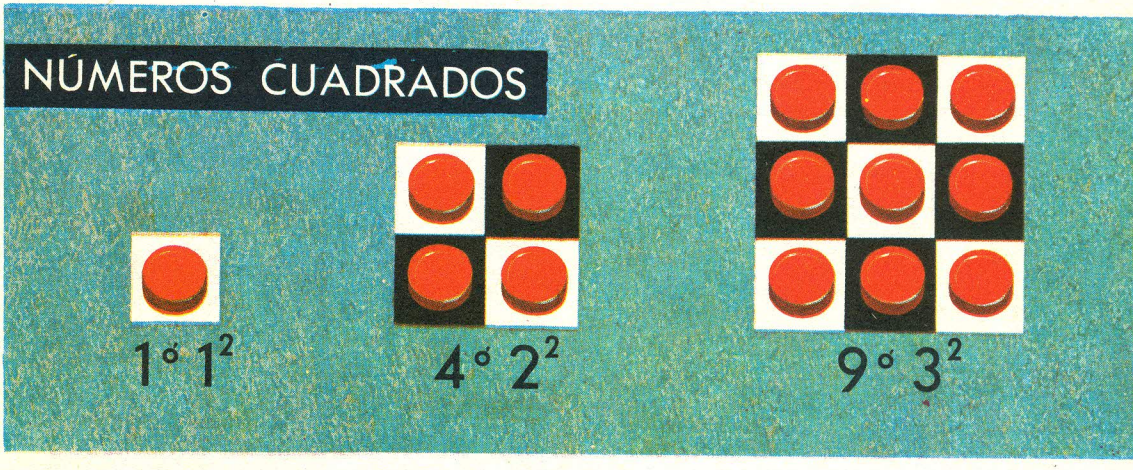
forman un rectángulo, por lo que el número triangular es la mitad del número rectangular. El rectángulo de la ilustración tiene siete hileras de ocho fichas cada una. Por lo tanto, el número rectangular es 7×8, ó sea 56. Y la mitad es 28. De esto se deduce que para encontrar un número triangular, se multiplica el número de hileras del triángulo por el número próximo más alto, y luego se divide el producto entre dos. Para determinar el octavo número triangular, divida entre dos el producto de 8×9.



NÚMEROS CUADRADOS

Formamos los números cuadrados haciendo rectángulos en los que el número de hileras sea igual al número de fichas de cada hilera. El cuadrado más pequeño tiene sólo una hilera; por lo tanto, el número cuadrado más pequeño es el 1. El siguiente cuadrado tiene dos hileras, con dos fichas en cada hilera, por lo que el siguiente cuadrado es: 2×2, ó sea 4. El tercer número cuadrado es 3×3, ó sea 9. Para obtener un cuadrado, multiplique cualquier número por sí mismo. El séptimo número cuadrado es 7×7, ó sea 49. Lo llamamos "siete al cuadrado", y lo expresamos así: 7^2. El pequeño dos escrito en la parte superior derecha, es una de las maneras de expresar que el siete se tomará dos veces como multiplicador.

Los números cuadrados se relacio-



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

nan con los números impares (números que no pueden formar rectángulos de dos líneas). Si hacemos una lista de los números impares, en orden progresivo, y escogemos cualquiera de ellos, la suma de esos números, incluso el que hemos escogido, será siempre un número cuadrado. El grabado nos lo explica claramente.

Los números cuadrados también se relacionan con los triangulares. Si sumamos cualquier número triangular con el siguiente número triangular mayor, obtendremos invariablemente un cuadrado.

NÚMEROS CÚBICOS

Si empleamos dados en vez de fichas, podemos colocarlos en hileras para formar un cuadrado, y encima de éste se pueden poner cuadrados formados por dados. Cuando el nú-

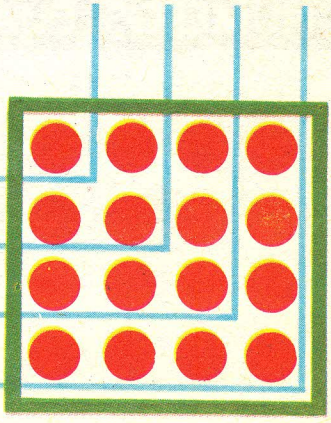
La suma de cualquier serie de números impares consecutivos es siempre un número cuadrado

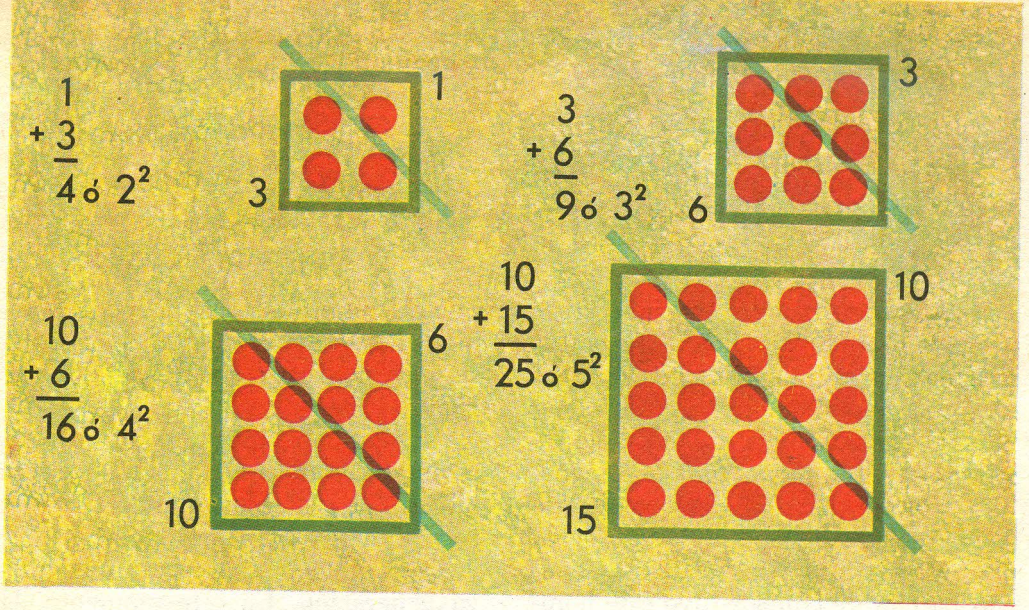
$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$ ó 4

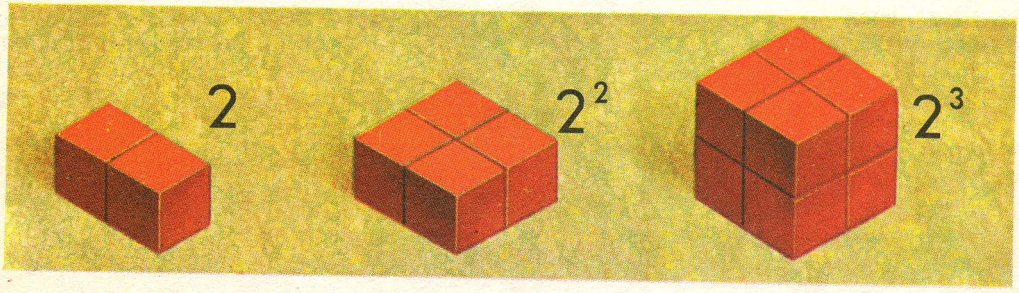
$1 + 3 + 5 = 3^2$ ó 9

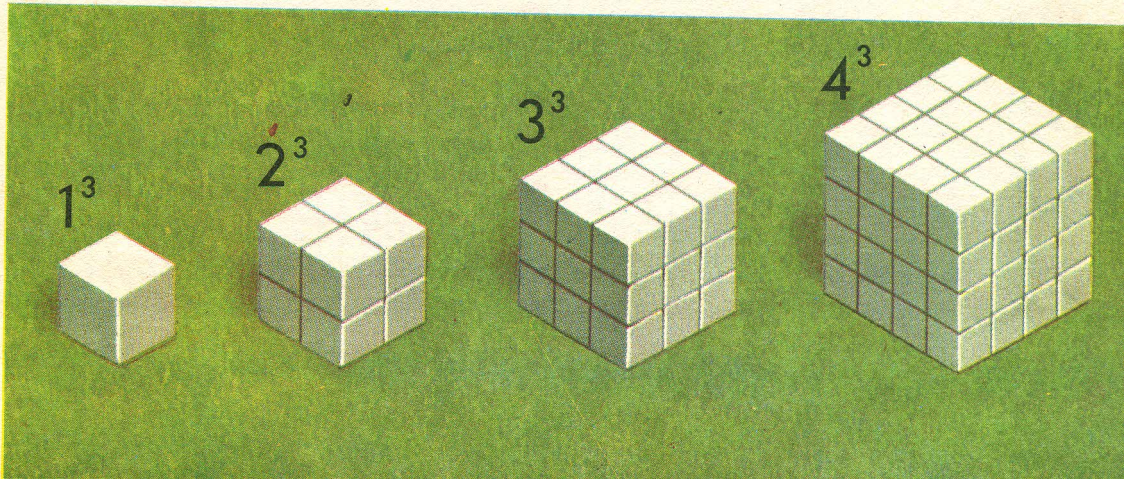
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ ó 16





mero de capas sea igual al número de dados que hay en una hilera, habremos formado un cubo. Ese número de dados que forma el cubo es un número cúbico. El número cúbico más pequeño es el 1. El segundo es $2 \times 2 \times 2$, o sea 8. Lo llamamos "dos al cubo" y lo representamos así: 2^3. El pequeño tres que se escribe en la parte superior derecha indica que el dos se empleó como multiplicador tres veces. El quinto número cúbico es "cinco al cubo". Se representa así: 5^3 y significa $5 \times 5 \times 5$, ó sea 125.



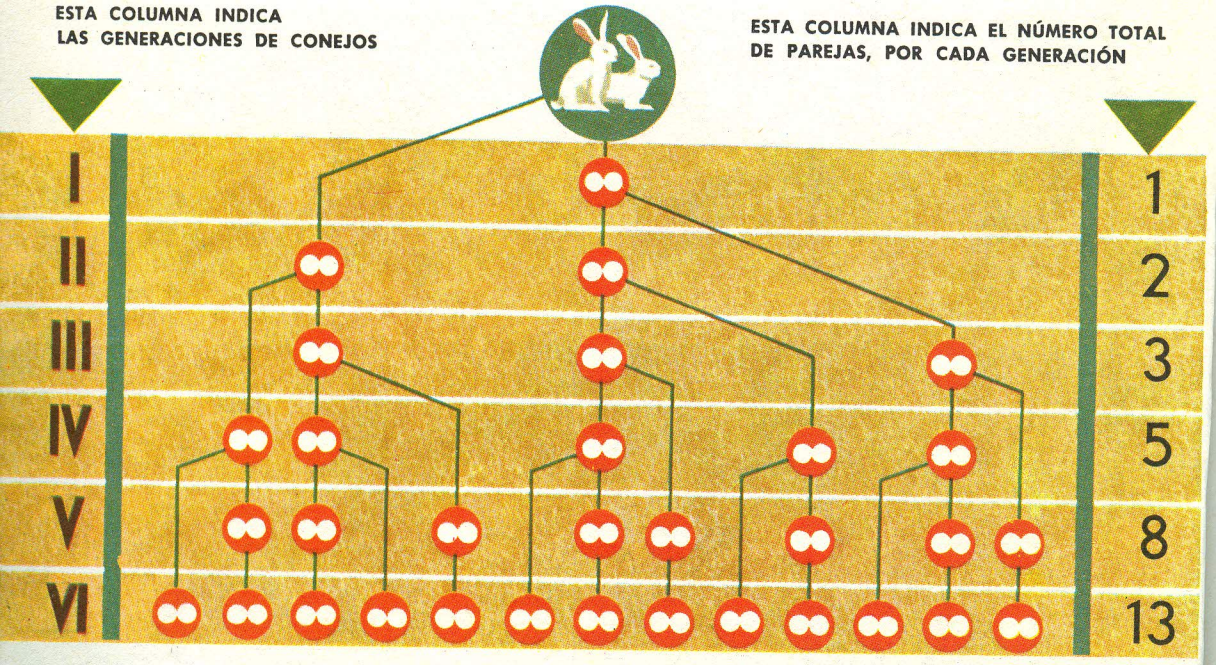


Los Conejos y las Plantas

Un hombre compró una pareja de conejos y cuidó de ellos. Esta pareja procreó un par de conejitos un mes después, y un segundo par de conejitos al segundo mes. Luego, dejó de procrear. Cada nueva pareja de conejitos tuvo a su vez dos parejas de conejitos en el mismo período y luego no tuvieron más crías. ¿Cuántas nuevas parejas de conejos tuvo este hombre cada mes?

Para contestar a esta pregunta, hagamos un esquema del número de parejas en cada generación de conejos. Escribamos el número 1 para representar la primera pareja con la que el hombre empezó la cría. Anotemos en seguida el número 1 para designar con él la pareja de conejos que nació al mes.

Al siguiente mes, ambas parejas tuvieron crías, así que el siguiente número es el 2. Hasta ahora tenemos tres números en el esquema: 1, 1 y 2. Cada número representa una nueva generación. En este momento, la primera generación dejó de procrear. La segunda generación (una pareja) procreó una pareja. La tercera generación (dos parejas) produjo, a su vez, dos nuevas parejas. Por lo tanto, el número que escribimos es 1 + 2, ó



sea 3. En este momento, la segunda generación dejó de procrear, pero la tercera generación (dos parejas) produjo dos parejas y la cuarta generación (tres parejas) procreó tres parejas, por lo que el número siguiente que escribiremos será 2 + 3, ó sea 5.

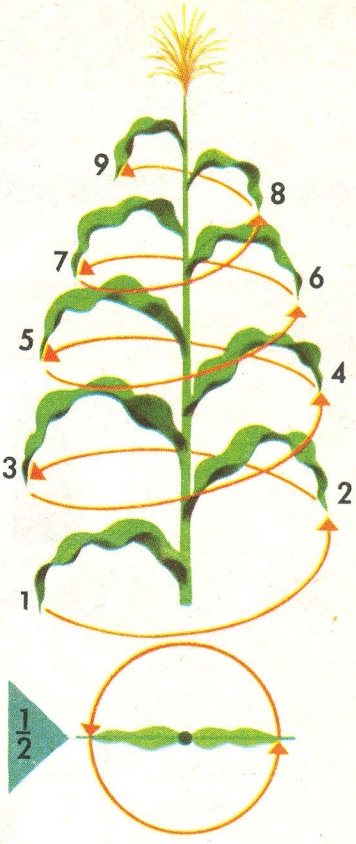
Cada mes, sólo las dos últimas generaciones tuvieron hijos, así que podemos obtener el siguiente número sumando las dos últimas cifras de la columna. Los números que obtenemos en esta forma se llaman *números de Fibonacci*. Los primeros doce son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 y 144. Estos números tienen propiedades muy interesantes; surgen a cada momento en la naturaleza y en el arte.

He aquí una de las propiedades de estos números. Escojamos tres números cualesquiera, sucesivos. Multipliquemos por sí mismo el número de en medio, y el primero por el tercero. Los resultados siempre diferirán en una unidad. Por ejemplo, si escogemos los números de Fibonacci 3, 5 y 8, tendremos: $5^2 = 5 \times 5 = 25$, en tanto que $3 \times 8 = 24$. Si los números elegidos son 5, 8 y 13, se tendrá: $8^2 = 64$, y $5 \times 13 = 65$.

Ahora bien, si dividimos cada uno de los números de Fibonacci entre su vecino de la derecha, obtenemos una serie de fracciones:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}$$

Estas fracciones describen el crecimiento de las plantas. Cuando nacen hojas nuevas en una planta, se disponen en espiral alrededor del tallo. La espiral va girando de abajo hacia arriba; la magnitud de la vuelta de una hoja a la siguiente, es una fracción de una rotación completa alrededor del tallo. Esta fracción es siempre una de las fracciones de Fibonacci. Las fracciones de Fibonacci aparecen siempre en la disposición de las brácteas del cono de un pino o en la de los flósculos de una flor.



Las fracciones de Fibonacci tienen varias propiedades interesantes. Una de ellas se puede emplear para describir las espirales que forman las hojas de las plantas cuando brotan del tallo. La distribución de las hojas superiores permite que los rayos del Sol se filtren hasta las hojas más bajas

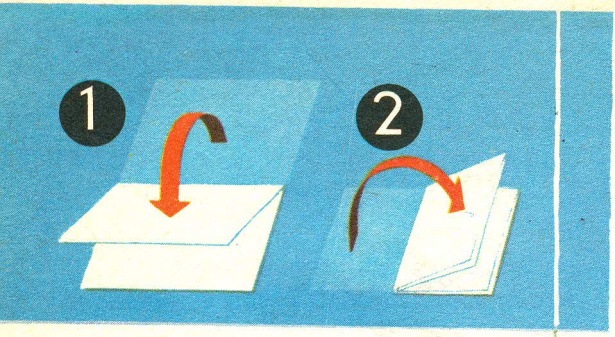
El Ángulo Recto

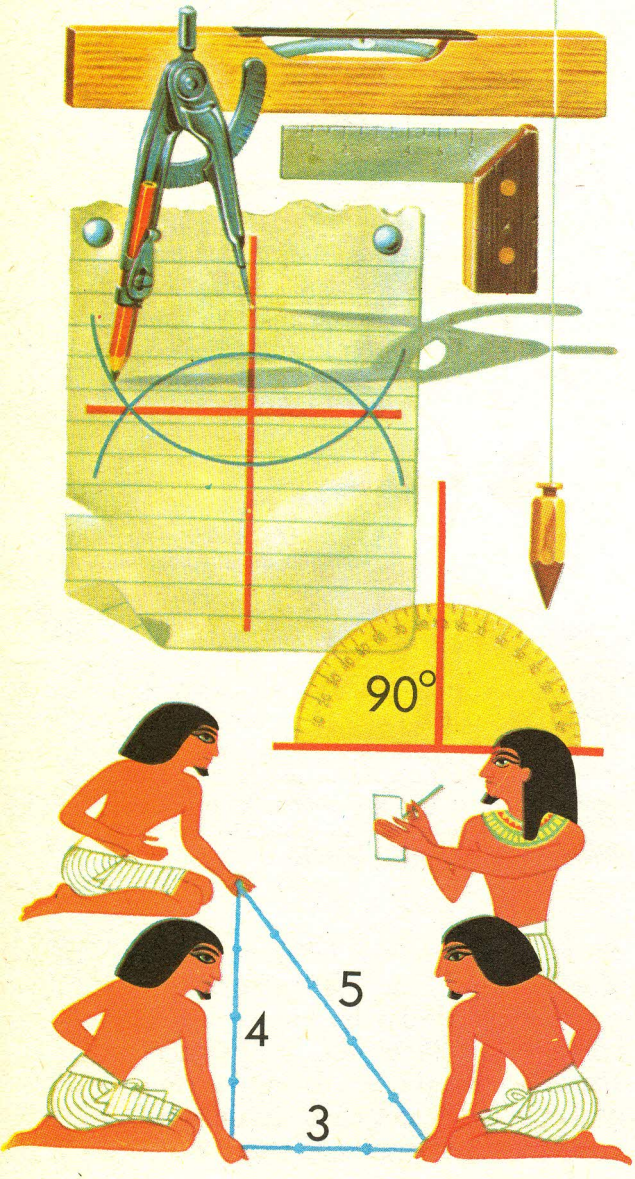
El ángulo que empleamos más a menudo es el que mide 90 grados. Lo llamamos ángulo recto.

Los albañiles forman un ángulo recto por medio de cuerdas. Fijan una cuerda horizontal con un nivel y colocan otra cuerda vertical suspendiendo un peso o plomada en el extremo libre. Así forman un ángulo recto exacto, que los guiará para tender las hiladas de ladrillos. De este modo, los muros de las casas que construyen estarán derechos y a plomo.

En el antiguo Egipto, los agrimensores formaban un ángulo recto por el procedimiento de "tender una soga"; empleaban una cuerda dividida en doce espacios iguales por medio de nudos. Un trabajador sostenía, juntos, los dos extremos de la soga, en tanto que otro sujetaba el nudo que marcaba tres espacios a partir del extremo, y un tercer hombre detenía con la mano el nudo que indicaba cuatro espacios contados del otro extremo. Si la cuerda estaba tirante, se formaba un ángulo recto.

Una manera de formar un ángulo recto consiste en doblar una hoja de papel. Se dobla y se vuelve a doblar, haciendo coincidir los dobleces.





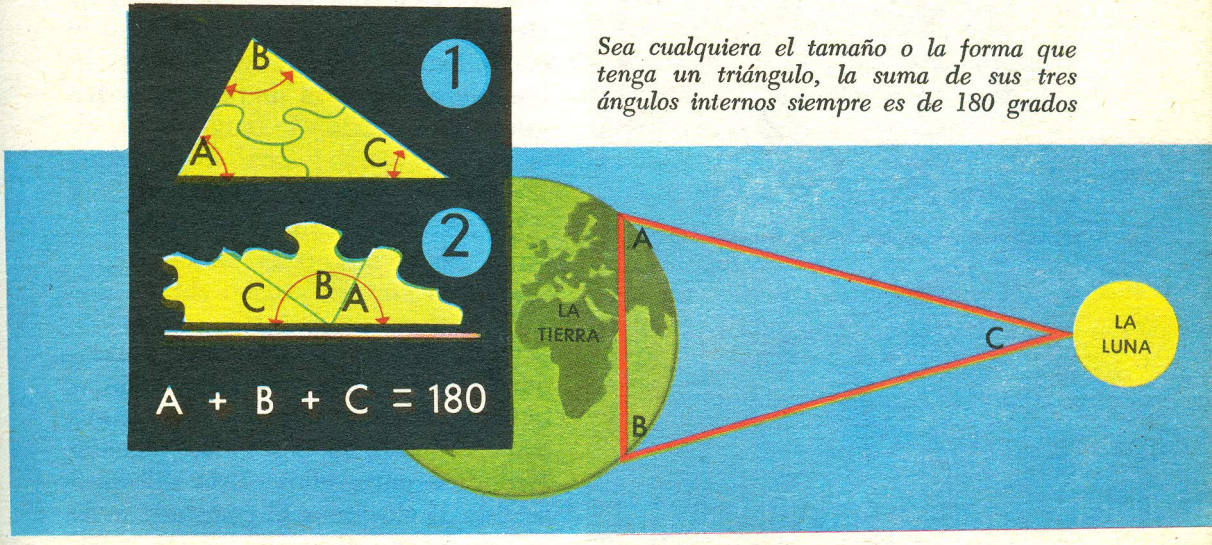
Un ángulo recto mide 90 grados. Los antiguos egipcios formaban los ángulos rectos manteniendo tirante una cuerda anudada uniformemente

Los Triángulos y la Distancia Entre la Tierra y la Luna

Los triángulos pueden ser de diferentes magnitudes y formas, pero los tres ángulos de cualquier triángulo siempre suman el mismo número de grados. Para darnos cuenta de esto, cortemos un triángulo de papel; luego, separemos con las tijeras sus tres ángulos. Coloquemos después lado con lado y esquina con esquina, y veremos que la suma de los tres ángulos es igual a 180°, es decir, formarán dos ángulos rectos. Éste es un dato importante, porque nos permite averiguar las magnitudes de los ángulos de los triángulos, aunque sólo midamos dos de ellos. Por ejemplo, si uno de los ángulos mide 40 grados y el segundo 60, podremos saber cuántos grados mide el tercero, sin que lo midamos directamente. Bastará con sumar 40 más 60 y restar el resultado de 180. El tercer ángulo, en este caso, medirá 80 grados.

Este método simplificado tiene especial utilidad si el tercer ángulo está fuera de nuestro alcance. Por ejemplo, supongamos que dos hombres situados en lugares muy distantes entre sí, en la Tierra, miran hacia la Luna. La posición de los dos hombres y la de la Luna forman un triángulo. Como no se puede medir el ángulo de la Luna, nos valemos, para calcularlo, de las dimensiones que tienen los de la Tierra.

Conocer la magnitud de este tercer ángulo es importante para los astrónomos, para calcular la distancia que hay de la Tierra a la Luna. Si ésta estuviera más distante, el tercer ángulo sería más pequeño; si estuviera más cerca, el tercer ángulo sería mayor.



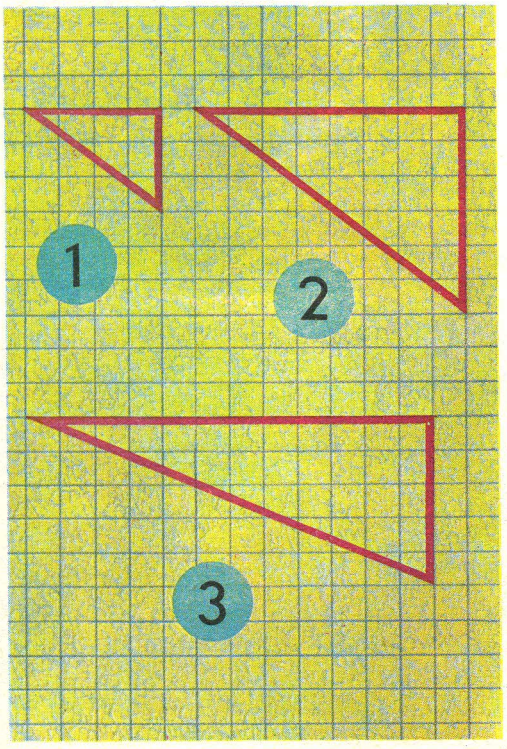
Sea cualquiera el tamaño o la forma que tenga un triángulo, la suma de sus tres ángulos internos siempre es de 180 grados

El Avión y la Puerta

Julio estaba construyendo un avión de juguete de gran tamaño en la habitación que le servía de taller. Cuando ya estaba a punto de pegar las alas al fuselaje del aeroplano, Julio pensó: "¿Pasará el avión por la puerta en cuanto las alas estén en su lugar? Las alas miden 3½ metros de punta a punta, y la puerta 2 metros de anchura por 3 metros de altura."

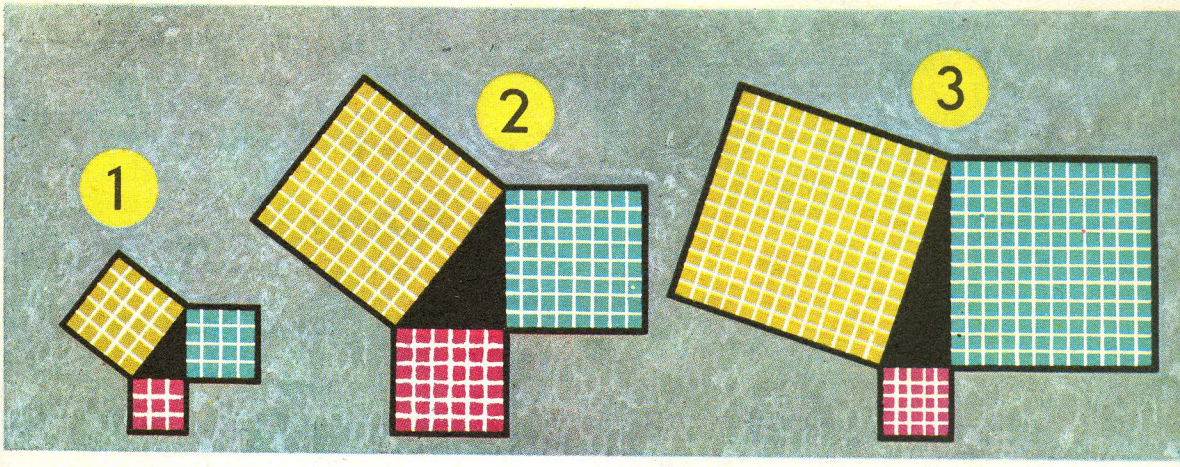
Julio no podría pasar el avión por la puerta, a menos que lo inclinara.

Podemos ayudar a Julio a resolver su problema averiguando qué relación hay entre los lados de un triángulo rectángulo. Tracemos en una hoja de papel cuadriculado un triángulo rectángulo de cuatro unidades de anchura (primer cateto) por tres unidades de altura (segundo cateto). Midamos ahora la hipotenusa (el lado más largo). Este último lado tendrá cinco unidades de longitud. Construyamos otros dos triángulos rectángulos, como los del dibujo, y midamos la hipotenusa de cada uno de los triángulos:



cateto	*cateto*	*hipotenusa*
4	3	5
8	6	10
12	5	13

Observemos los números correspondientes a cada triángulo; aparentemente no hay relación alguna entre ellos, pero sí existe una relación escondida entre ellos. Ésta saltará a la vista si elevamos al cuadrado cada uno de los números.



Hace 2,500 años, Pitágoras formuló un teorema, el cual expresa que un triángulo rectángulo, el cuadrado de uno de los catetos más el cuadrado del segundo cateto, siempre es igual al cuadrado de la hipotenusa

(1er. cateto) ^{2}	*(2º cateto)* ^{2}	*(hipotenusa)* ^{2}	
$4 \times 4 = 16$	$3 \times 3 = 9$	$5 \times 5 = 25$, y	$16 + 9 = 25$
$8 \times 8 = 64$	$6 \times 6 = 36$	$10 \times 10 = 100$	$64 + 36 = 100$
$12 \times 12 = 144$	$5 \times 5 = 25$	$13 \times 13 = 169$	$144 + 25 = 169$

Los ejemplos anteriores establecen una regla que descubrió hace unos dos mil quinientos años un matemático griego llamado Pitágoras. La regla establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de uno de los catetos, más el cuadrado del otro cateto, es igual al cuadrado de la hipotenusa; es decir: $(\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 = (\text{hipotenusa})^2$.

Si aplicamos esta regla, nos ayudará a resolver el problema de Julio. Nos damos cuenta de que la anchura, la altura y la diagonal de la puerta, forman un triángulo rectángulo. Sus catetos miden, respectivamente, 2 y 3 metros. De aquí resulta: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$. Como 13 es el cuadrado de la diagonal por la que el avión debe pasar, tenemos que elevar al cuadrado la distancia de punta a punta de las alas, para saber si es o no más pequeña que la diagonal de la puerta. La distancia de punta a punta de las alas es de 3½ metros.

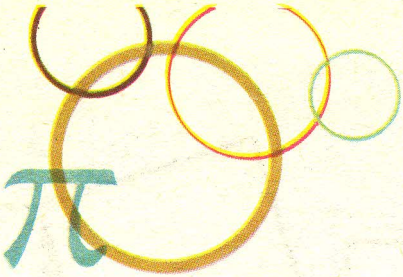
$$(3\tfrac{1}{2})^2 = 3\tfrac{1}{2} \times 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2} \times \tfrac{7}{2} = \tfrac{49}{4} = 12\tfrac{1}{4}$$

Este resultado es menor que 13; por lo tanto, el aeroplano podrá pasar, ladeándolo, por la puerta.

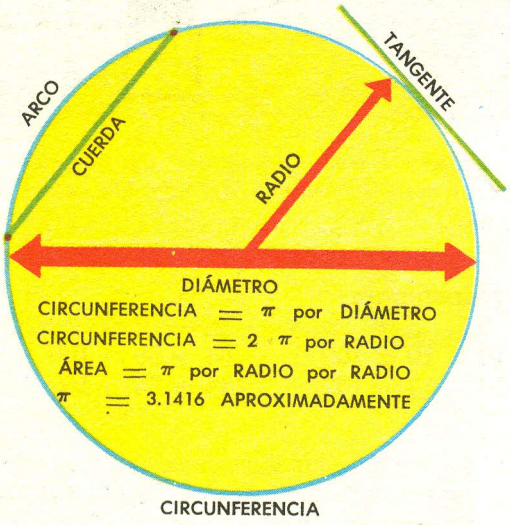
He aquí tres conjuntos de números. Sólo dos de ellos obedecen al teorema de Pitágoras. ¿Cuáles son?

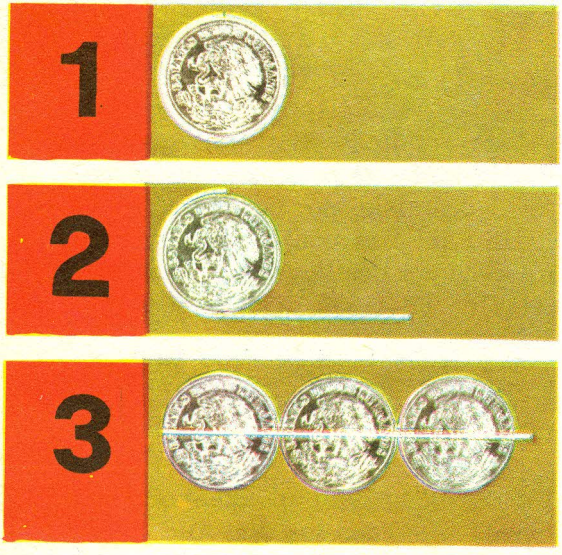
9	12	15
8	15	17
12	15	18

Los primeros dos conjuntos obedecen al teorema de Pitágoras.



Círculos y Mondadientes





En la vida diaria vemos continuamente circunferencias y círculos. Ejemplos de las primeras son el borde de las tazas y de los platos, una sortija, etc. De los segundos las monedas, el Sol y la Luna vistos desde la Tierra.

La distancia que une en línea recta los extremos del círculo, pasando por su centro, se llama *diámetro* del círculo. La línea que limita el círculo, o sea su perímetro, se llama *circunferencia*. Midamos el diámetro de una moneda y su circunferencia, empleando un cordel para hacer esta última medición y midiendo con una regla el pedazo de cordel. Encontraremos que la circunferencia de la moneda medirá, aproximadamente, tres veces más que el diámetro. La circunferencia de *cualquier* círculo es siempre el mismo número de veces mayor que su diámetro. Este número constante no puede escribirse exactamente como un número fraccionario o como un decimal, por lo que utilizamos la letra griega π (pi) para representarlo. Equivale a $3\frac{1}{7}$, ó 3.14, aproximadamente.

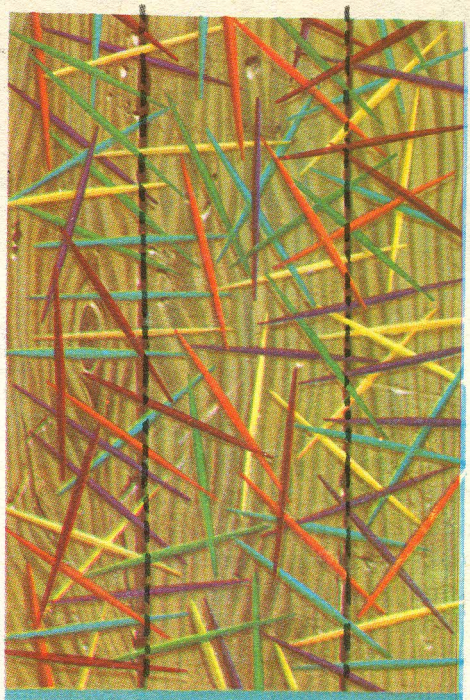
Aunque parezca extraño, hay una forma interesante de calcular el valor de π, arrojando un mondadientes a un

La circunferencia, o línea curva que limita al círculo, siempre es igual al diámetro multiplicado por 3.14, el número conocido como pi

piso de madera. El piso debe tener duelas de la misma anchura, y el mondadientes la misma longitud que la anchura de las duelas. Arrojemos el mondadientes varias veces al piso, llevemos la cuenta de las veces que lo arrojamos y el de las veces que el mondadientes cae en posición transversal, entre dos ranuras. Dupliquemos el número de veces que arrojamos el mondadientes y dividamos este número entre el número de veces que cayó transversalmente a las ranuras. El resultado será el valor de π.

Por ejemplo, supongamos que hemos arrojado el mondadientes al piso cien veces y que cayó en posición transversal, en una duela, 62 veces. Dividamos 200 entre 62. El resultado es 3.2, aproximadamente. No es éste un valor muy exacto de π, pero mientras más veces arrojemos al piso el mondadientes, obtendremos un valor más exacto. Cuando un mondadientes gira alrededor de su centro, describe un círculo. Por esta razón, π, que es una constante del círculo, también se relaciona con las probabilidades de que el mondadientes caiga transversalmente a las duelas, es decir, perpendicular a las ranuras.

Otra forma de calcular π es mediante el uso de los números impares, 1, 3, 5, 7, 9, etc. Escriba primero las fracciones $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, etc. Luego, a partir de la primera fracción, reste la segunda, añada la tercera, reste la cuarta, y así sucesivamente. Suspenda la operación cuando usted quiera, y multiplique por 4. El resultado será un número aproximado al valor de π. Mientras mayor sea el número de fracciones que emplee usted, más exacto será el valor de π.



TIRE UN MONDADIENTES 100 VECES

MULTIPLIQUE × 2

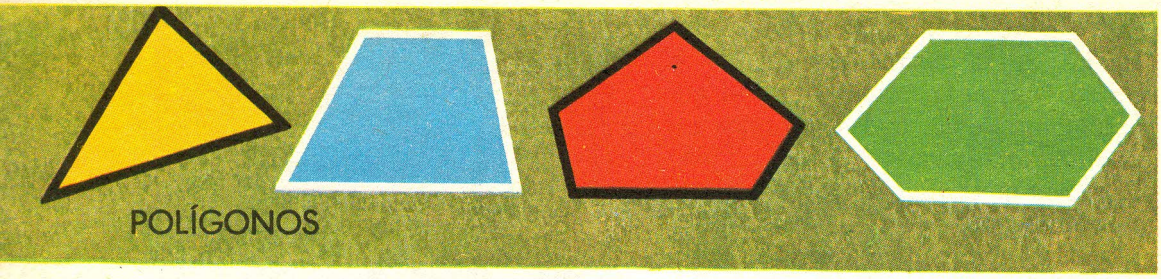
200

EL MONDADIENTES CAERÁ EN UNA RANURA 62 VECES

POR LO TANTO:

$200 \div 62 = 3.2$

EL CUAL ES EL VALOR APROXIMADO DE π

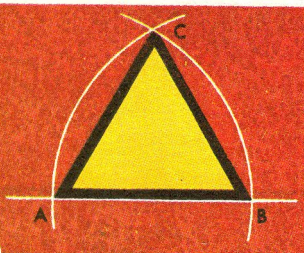


Lados Iguales y Ángulos Iguales

Una figura geométrica cuyos lados estén cerrados y sean rectos, se llama polígono. Los triángulos y los cuadrados son polígonos. El número de ángulos que hay en un polígono es el mismo que el número de lados.

Existen polígonos que tienen ángulos iguales y lados iguales. Los llamamos *polígonos regulares*. Un polígono regular puede tener cualquier número de lados, a partir de tres. Una forma de construir un polígono regular, es calcular el número de grados que debe tener cada ángulo, y trazar estos ángulos utilizando un transportador y separando sus lados en distancias iguales. Para obtener el número de grados en la *suma* de los ángulos de cualquier polígono, reste 2 al número de lados y luego multiplique el resultado por 180. Si la figura consta de tres lados, los ángulos deberán sumar 180 grados. (3 ángulos, menos 2 = 1. 1 × 180 = 180°.) Por lo tanto, para tres ángulos iguales, dividimos la suma de los ángulos (180) entre 3. Esto nos proporciona la medida de cada ángulo. Por lo tanto, cada ángulo medirá 60 grados. Si la figura geométrica consta de cuatro lados, los ángulos sumarán 360 grados. (4 ángulos menos 2 = 2. 2 × 180 = 360.) Por tanto, cada uno de los cuatro ángulos iguales medirá 90 grados.

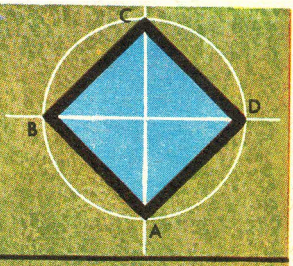
1



TRIÁNGULO EQUILÁTERO

NÚMERO DE ÁNGULOS: 3
NÚMERO TOTAL DE GRADOS: 180
MAGNITUD DE CADA ÁNGULO: 60°

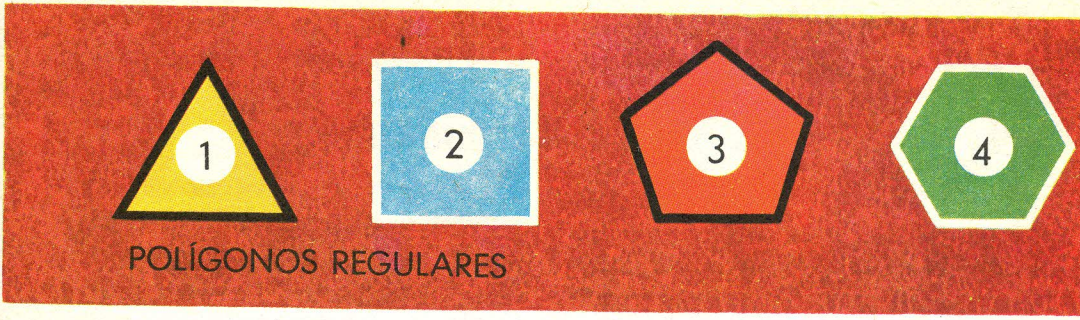
2



CUADRILÁTERO REGULAR

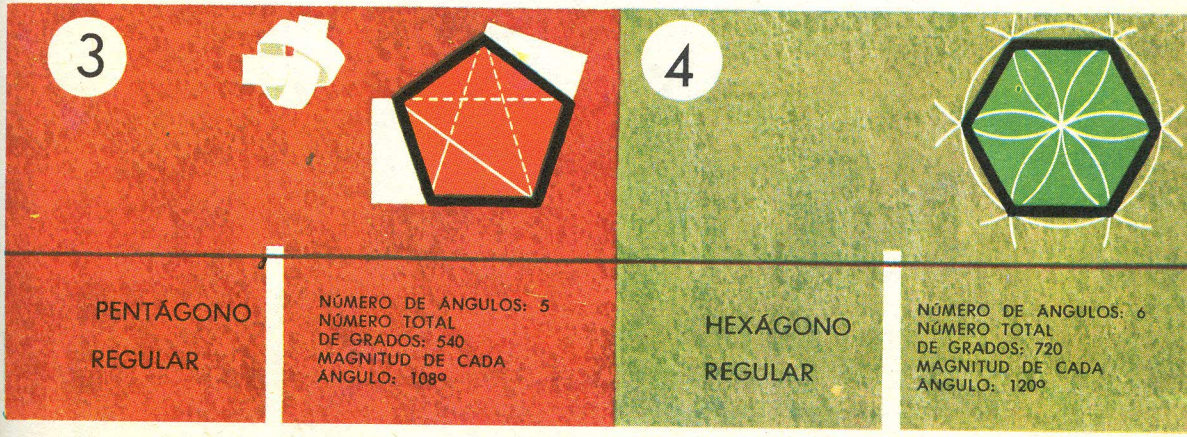
(Cuadrado)

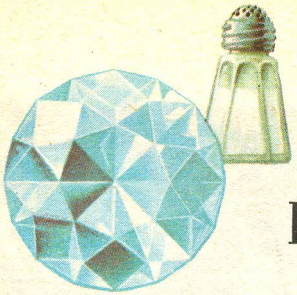
NÚMERO DE ÁNGULOS: 4
NÚMERO TOTAL DE GRADOS: 360
MAGNITUD DE CADA ÁNGULO: 90°



NOMBRE	NÚMERO DE ÁNGULOS	SUMA DE LOS ÁNGULOS EXPRESADA EN GRADOS	DIMENSIÓN DE CADA ÁNGULO EXPRESADA EN GRADOS
1. Triángulo equilátero	3	180	60
2. Cuadrado	4	360	90
3. Pentágono regular	5	540	108
4. Hexágono regular	6	720	120

Se puede trazar un triángulo equilátero con regla y compás, por el método que se ilustra en el grabado. Para construir un cuadrado, primero se traza un círculo. Después, se dobla el papel en que fue trazado, de manera que el borde del papel pase por el centro del círculo. Se dobla nuevamente el papel en forma tal que forme un ángulo recto con el centro. Se extiende la hoja de papel y se unen los puntos en que los dobleces crucen el círculo. Para hacer un pentágono regular, se corta una tira de papel de anchura uniforme. Después, se hace un nudo con la tira, tal y como se muestra en el grabado, y se aplana. Para construir un hexágono regular, se traza primero un círculo y luego se marcan con el compás partes iguales de la circunferencia, de la misma anchura del radio del círculo con el que se ha trazado. Habrá seis espacios iguales; únanse con líneas rectas las marcas trazadas y se formará un hexágono regular.

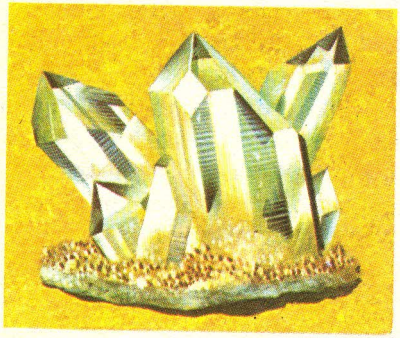


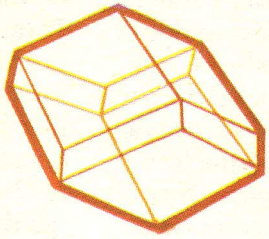


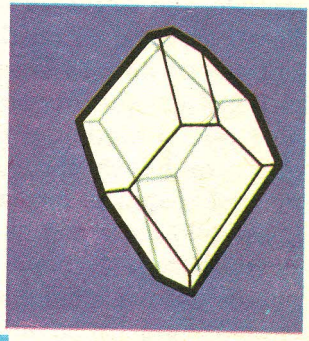
La Sal y los Diamantes

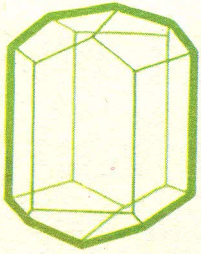
Muchos minerales forman hermosos cristales de caras lisas y bordes agudos. En algunos de estos cristales, las facetas son polígonos regulares, que tienen el mismo tamaño y la misma forma, con el mismo número de polígonos en cada esquina. Un sólido construido en esta forma, se llama *sólido regular*.

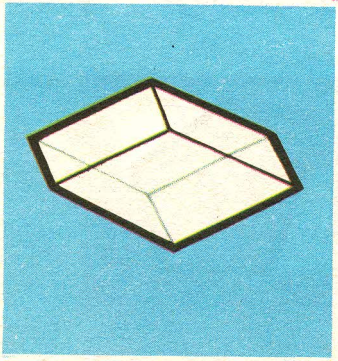
Hay exactamente cinco sólidos regulares. Sus nombres nos indican el número de caras de que se componen. El *tetraedro* (cuatro caras) se compone de triángulos, con tres triángulos en cada esquina. El *hexaedro* o cubo (seis caras) se compone de cuadrados, con tres cuadrados en cada esquina. El *octaedro* (ocho caras) está compuesto de triángulos, con cuatro triángulos en cada esquina. El *dodecaedro* (doce caras) está compuesto de pentágonos, con tres pentágonos en cada esquina. El *icosaedro* (veinte caras) se compone de triángulos, con cinco triángulos en cada esquina.

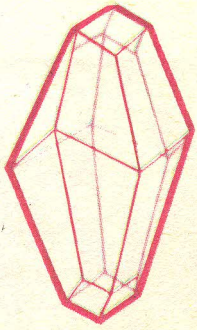


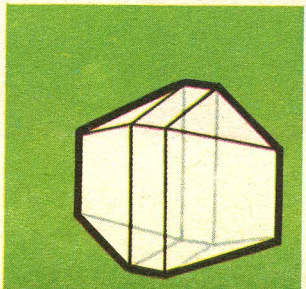












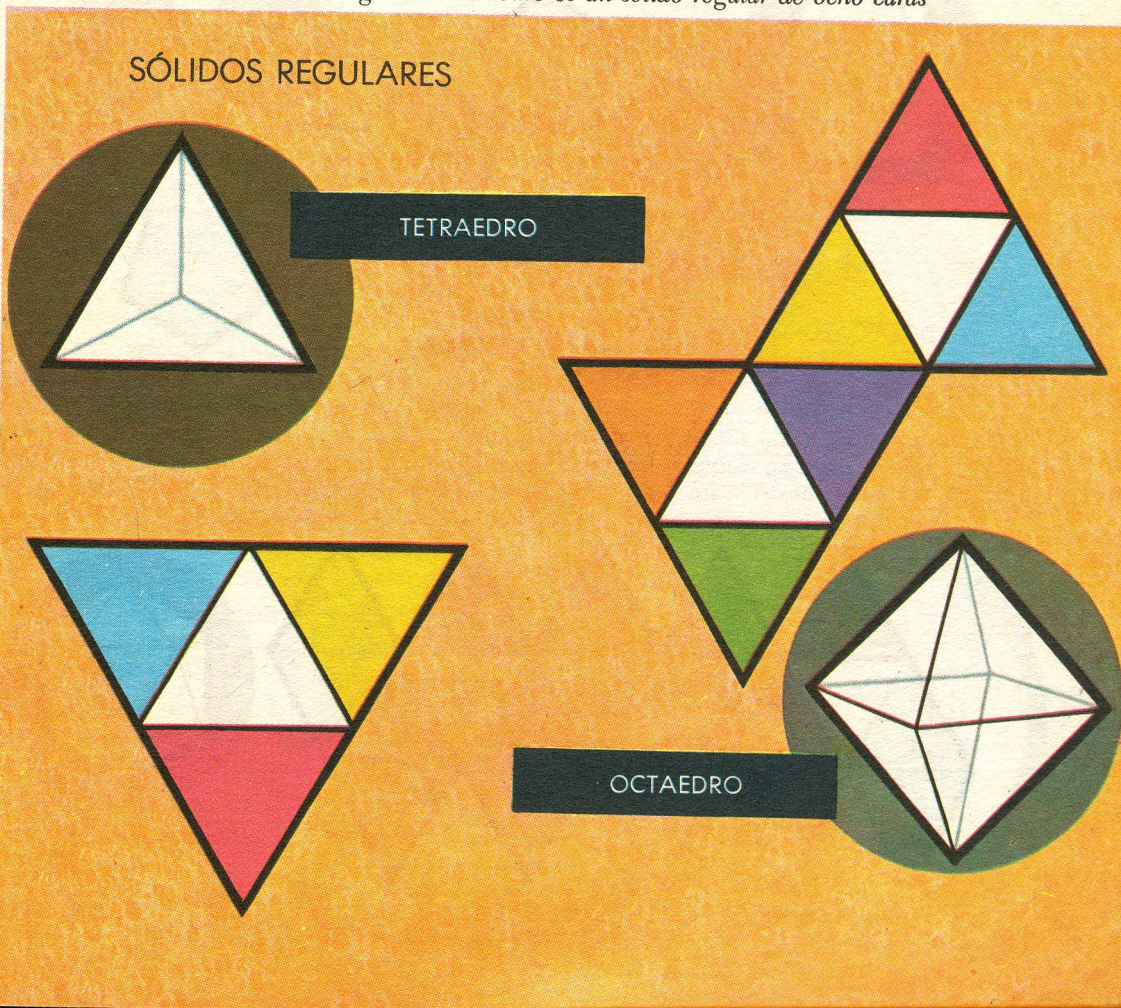
Muchos minerales forman cristales. Unos cuantos de éstos son sólidos regulares, cuyas caras son polígonos regulares

Una propiedad interesante de todos los sólidos de caras planas es la de que, si sumamos el número de esquinas y el número de caras de cualquiera de ellos, obtendremos el número de bordes, o aristas, de ese sólido, más dos. Hagamos lo anterior con el cubo que aparece en el grabado de la página 28. Consta de ocho esquinas y seis caras, por lo que la suma de estos números es 14. Ahora contemos el número de bordes. Consta de 12.

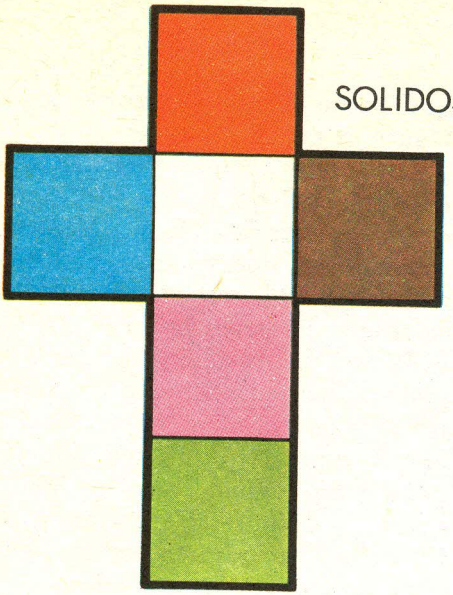
Si examinamos un cristal de sal común a través de un potente cristal de aumento, podemos darnos cuenta de que es un cubo. Un cristal de diamante es un octaedro.

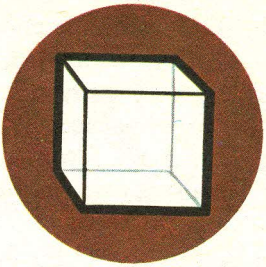
Los sólidos regulares forman atractivos objetos de ornato. Se venden como pisapapeles. Hay calendarios dibujados en dodecaedros, en los que cada mes está grabado en una cara diferente. Podemos hacer modelos de cada uno de los sólidos regulares empleando los patrones que ilustran estas páginas. Primero, se hace un triángulo equilátero, un cuadrado y un pentágono regular, en una hoja de cartón, y después se recortan; a continuación, se repiten estas figuras como lo indican los grabados.

Sólo hay cinco sólidos regulares. El tetraedro tiene cuatro caras, cada una de las cuales es un triángulo. El octaedro es un sólido regular de ocho caras

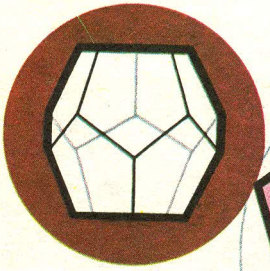


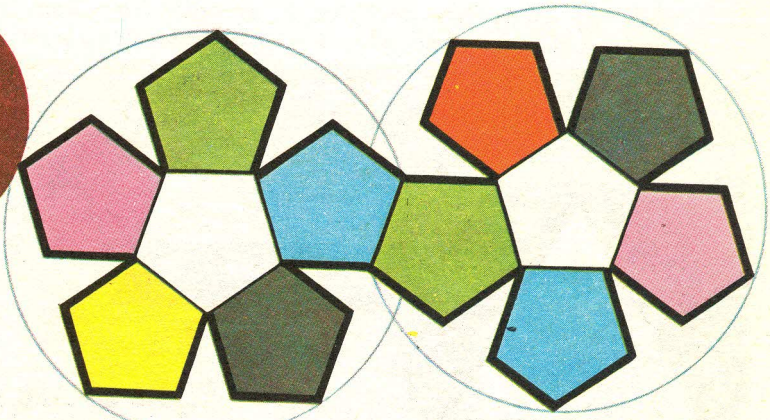
SOLIDOS REGULARES





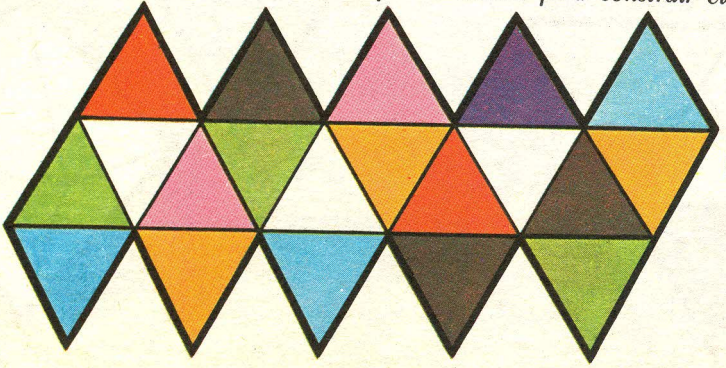
HEXAEDRO (CUBO)

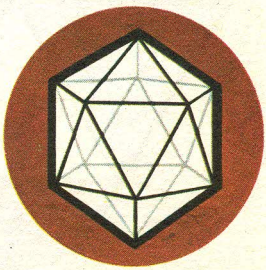




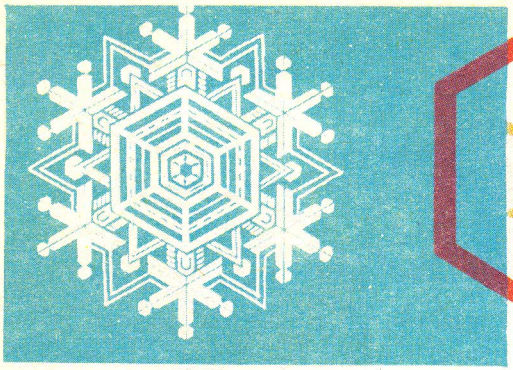
DODECAEDRO

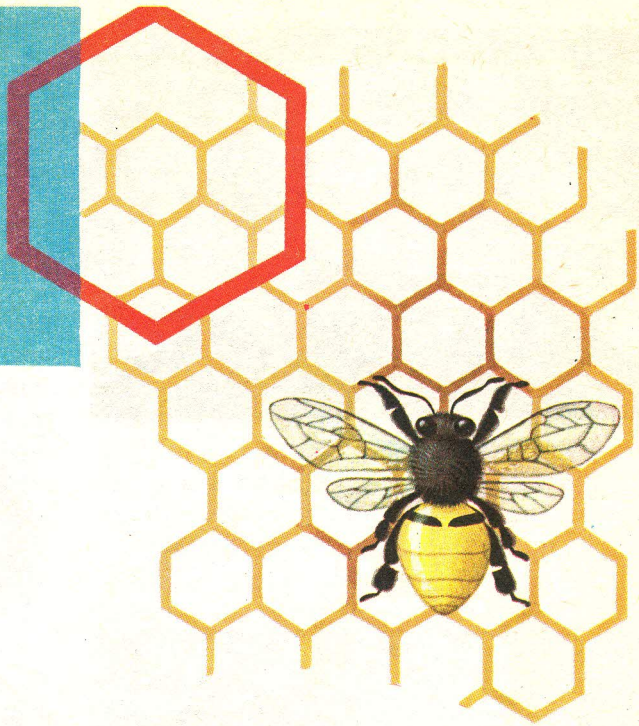
Se puede construir un dodecaedro copiando sobre un pedazo de papel cartoncillo el desarrollo de dicho sólido que se muestra arriba. Una vez que esté trazado, recorte por las líneas gruesas, dóblelo por las líneas delgadas y una los bordes con papel engomado. Para construir un icosaedro, copie el desarrollo de dicho sólido que aparece abajo, y siga las instrucciones que se dieron para construir el dodecaedro





ICOSAEDRO



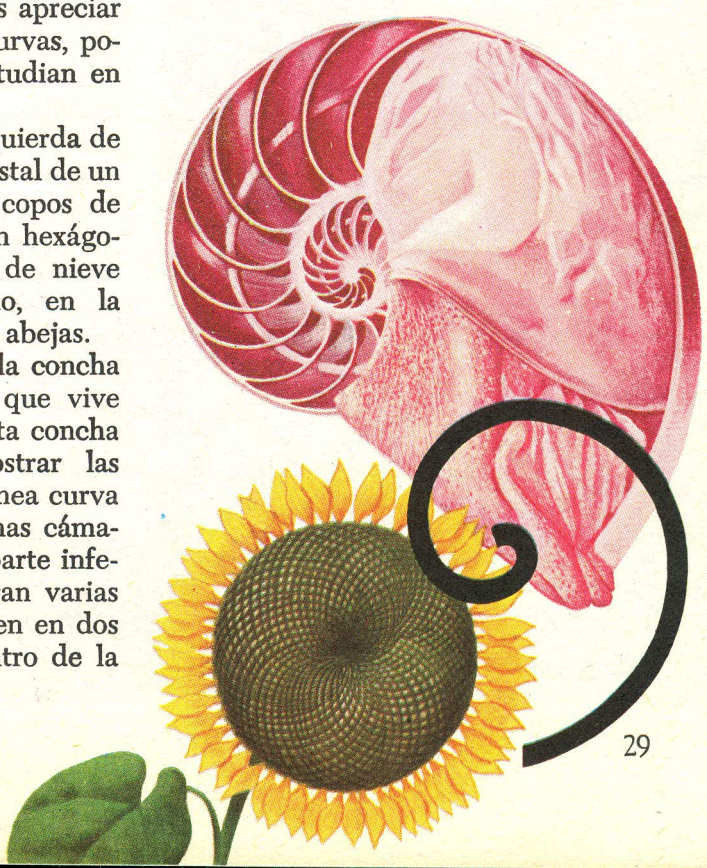


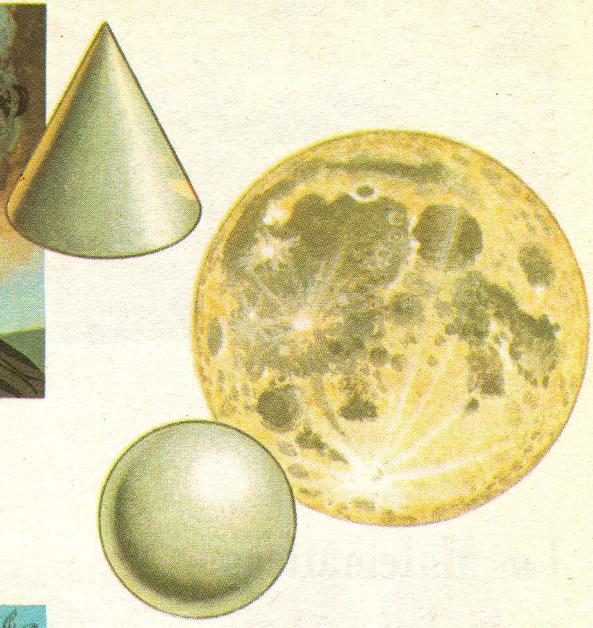
Las Matemáticas en la Naturaleza

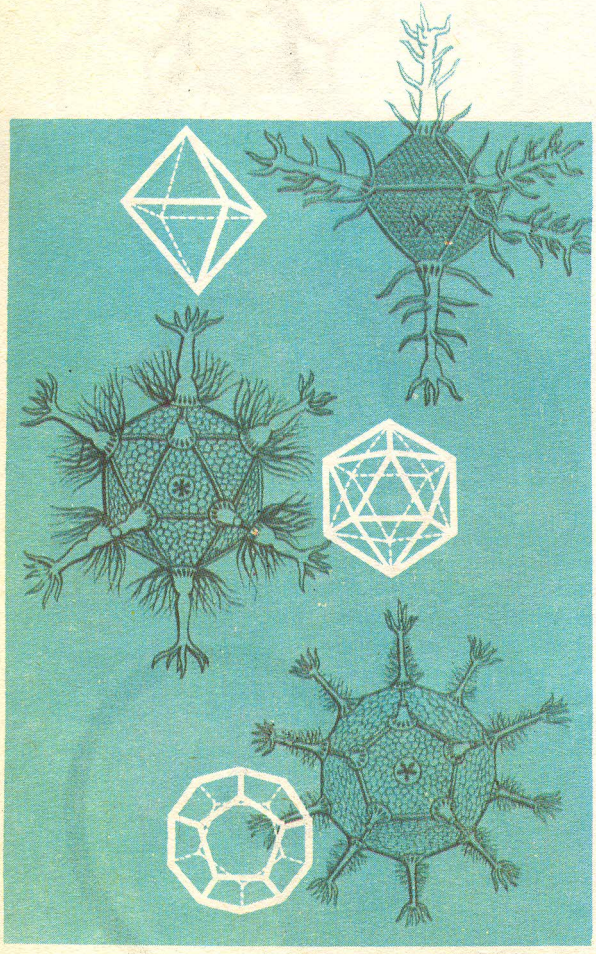
En la naturaleza podemos apreciar hermosos ejemplos de las curvas, polígonos y sólidos que se estudian en las matemáticas.

En la esquina superior izquierda de esta página se muestra el cristal de un copo de nieve. Todos los copos de nieve tienen la forma de un hexágono regular. Junto al copo de nieve encontramos otro hexágono, en la colmena que construyen las abejas.

Debajo del panal vemos la concha del *nautilus*, un animalito que vive en el mar. Se ha cortado esta concha transversalmente, para mostrar las cámaras que contiene. La línea curva que marca el límite de dichas cámaras, se llama espiral. En la parte inferior de la página se muestran varias espirales que se desenvuelven en dos direcciones a partir del centro de la flor llamada girasol.

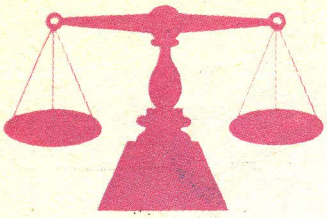






Cuando se forman los volcanes, la lava caliente se esparce formando un cono. En la sección de la galaxia que aparece arriba, la Luna, el Sol y las estrellas, son esferas. Podemos apreciar claramente la forma esférica de la Luna, que es el cuerpo celeste más cercano a la Tierra.

El grabado inferior de la izquierda representa los esqueletos de algunos radiolarios. Éstos son animales microscópicos que viven en el mar. El fondo de los océanos Pacífico e Índico está cubierto de estos esqueletos, restos de animales que vivieron hace millones de años. Cada uno de ellos es un polígono simétrico perfecto. El esqueleto de la parte superior es un octaedro casi perfecto, o sea, un sólido de ocho caras. El del centro, es un dodecaedro, de doce caras; y el de la parte inferior, un icosaedro, sólido de veinte caras.



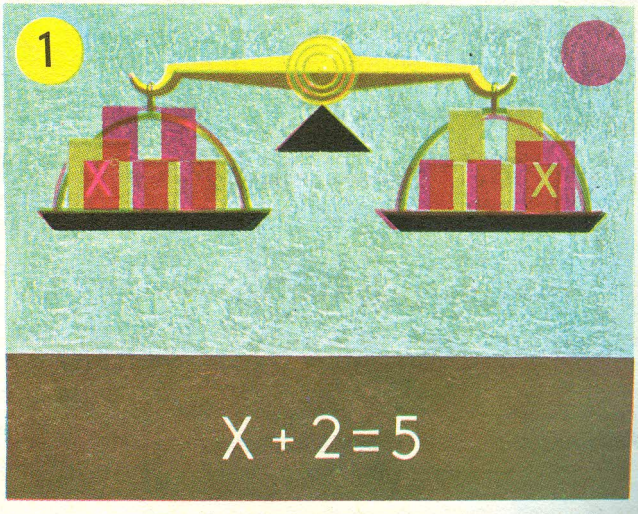
Letras en vez de Números

Sabemos que $1 + 2 = 2 + 1$, $2 + 3 = 3 + 2$, y $4 + 7 = 7 + 4$. Podemos hacer que cualquier número sumado a otro número forme una igualdad de este tipo. Escribamos simplemente un primer número, más un segundo número, antes del signo de igualdad. En el lado derecho de dicho signo, invirtamos el orden de los números.

En lugar de escribir cada miembro de la igualdad separadamente, podemos escribirlos juntos. De este modo: representemos por la letra a cualquier número, y por la letra b cualquier otro número. Luego, escribamos simplemente: $a + b = b + a$. Al hacer esto, hemos pasado de la aritmética al *álgebra.*

En álgebra empleamos letras que representan números. Es como si utilizáramos una clave para expresar muchas cosas en un espacio reducido. En esta clave no utilizamos el signo $\times$ para denotar "veces", porque podríamos confundirlo con la letra x. Indicamos la multiplicación usando un punto en la parte media entre el multiplicando y el multiplicador, o simplemente escribiendo el multiplicando y el multiplicador uno a continuación del otro, sin emplear *símbolo* alguno. En esta clave, $a \cdot b$ significa "el número que representa a, multiplicado por el número que representa b". También se puede escribir ab.

Cuando el mismo factor se emplea una y otra vez, empleamos la misma forma abreviada de escribir el producto de números cuadrados y cúbi-



Las ecuaciones algebraicas siguen el mismo principio que las balanzas. Lo que se ponga en un miembro de la ecuación, o en un platillo de la balanza, deberá ser igual al número o al peso que hay en el otro miembro, o platillo, a fin de que quede en equilibrio

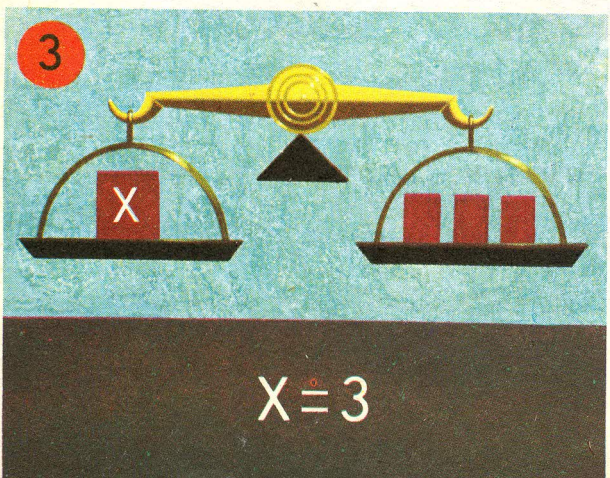
cos de las páginas 13 a 15. Cuando escribimos x^4, llamada esta expresión "equis a la cuarta potencia", es como si escribiésemos $x \cdot x \cdot x \cdot x$, ó sea x como factor cuatro veces.

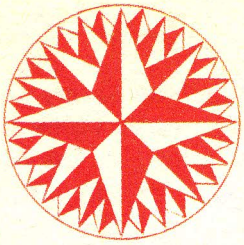
He aquí un enunciado en clave que no siempre es cierto: $x + 2 = 5$. Esto no es cierto, ya que si a x le asignamos el valor de 7, $7 + 2$ no es igual a 5. Pero será cierto, si le damos a x el valor de 3. Un enunciado de este tipo recibe el nombre de *ecuación*. Resolver una ecuación significa obtener el valor que hace que un enunciado sea cierto.

Una ecuación se asemeja a una balanza. Se supone que $x + 2$ equilibrará el 5, de la forma en que dos pesas iguales nivelan la balanza. Si cambiamos una pesa en uno de los platillos de la balanza, podemos equilibrarla nuevamente, haciendo que cambie la otra pesa en la misma cantidad. Este razonamiento nos indica cómo resolver una ecuación: simplemente modifiquemos ambos miembros de la ecuación, en idéntica forma, sumando o restando, multiplicando o dividiendo. Como 5 es lo mismo que $3 + 2$, la ecuación $x + 2 = 5$ significa $x + 2 = 3 + 2$. Si quitamos 2 unidades a cada miembro de la ecuación, quedarán equilibrados ambos miembros, y de esta manera encontramos que $x = 3$ es la solución, es decir, el valor de la incógnita. Para resolver la ecuación $3x = 12$, dividimos ambos miembros de la ecuación entre 3, y obtenemos la solución: $x = 4$.

¿Puede usted resolver la ecuación $3x - 4 = 8$? Para obtener la solución, súmese 4 a cada miembro de la ecuación, y luego divídase cada miembro entre 3.

La palabra *álgebra* fue acuñada hace unos mil años. Procede del título de un libro que trataba acerca de las ecuaciones y que fue escrito por un matemático árabe, Al-Khowarizmi, y al que llamó *al-jabr w'al-mukabalah*. Cuando el libro fue traducido al latín, el título se convirtió en *Ladus algebrae almucgrabalaeque*. Al ser traducido al inglés su nombre fue *algiebar and almachabel*. Las tres denominaciones se simplificaron y su nombre actual es *álgebra*.



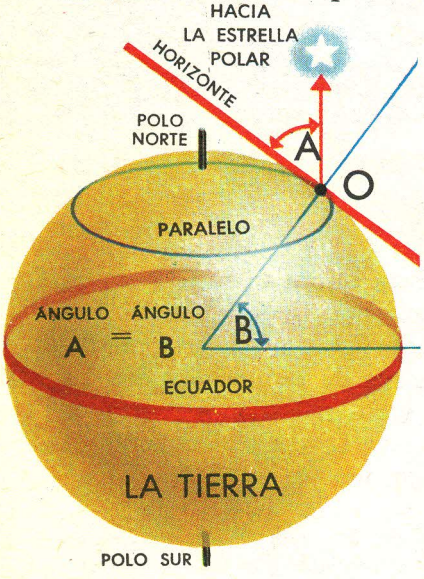


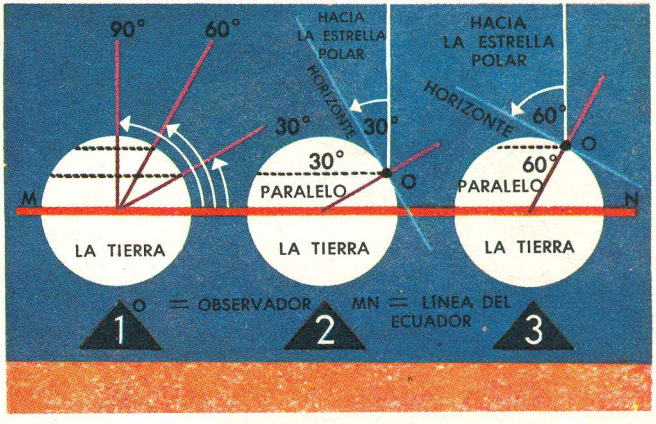
La Navegación

Un navegante tiene dos problemas fundamentales que resolver: uno de ellos es saber en un momento determinado en qué parte de la Tierra se encuentra. El otro consiste en calcular qué curso debe seguir su embarcación para ir de un lugar a otro. Los utensilios de que dispone para resolver estos problemas son: una brújula, un sextante, un reloj y un almanaque. La brújula le indica hacia dónde queda el norte, para que pueda medir correctamente las direcciones. Con su sextante mide la altura del Sol, la de la Luna o la de una estrella que esté por encima del horizonte. El reloj le indicará la hora, respecto de la del meridiano de Greenwich, en Inglaterra. El almanaque le indica cómo es el cielo en Greenwich determinado día del año, o a determinada hora de un día cualquiera. Mediante toda esta información, ya puede el navegante resolver sus problemas.

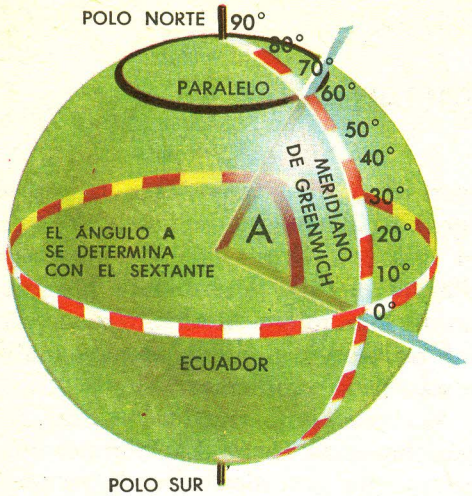
Veamos cómo puede localizar su posición en la Tierra. La Tierra es una esfera que gira alrededor de su propio eje. Este eje apunta casi directamente hacia la estrella polar. El diagrama del pie de la página muestra a varios observadores situados en diferentes puntos de la Tierra, mirando hacia la estrella polar. El hombre situado en el ecuador ve la estrella polar directamente sobre el horizonte.

Para los demás, esta estrella forma un ángulo con el horizonte, mientras



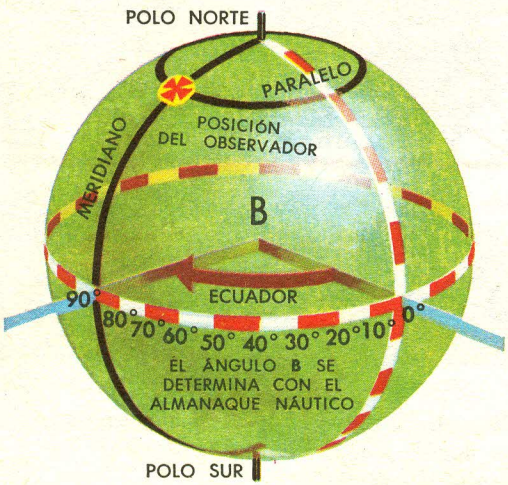


En el ecuador, un observador verá la estrella polar en el horizonte. Si avanza hacia el norte, verá que la estrella polar forma un ángulo con el horizonte. Al medir este ángulo, podrá saber a qué distancia se encuentra del ecuador



más al norte esté situado el hombre, más grande será el ángulo. Por lo tanto, al medir este ángulo, el hombre sabe qué tan al norte está por encima del ecuador. Si el ángulo es de 30 grados, el navegante estará a 30 grados de latitud norte. Después, tiene que averiguar exactamente en qué punto del paralelo está su barco.

Este paralelo es cruzado en algún sitio por el meridiano de Greenwich,

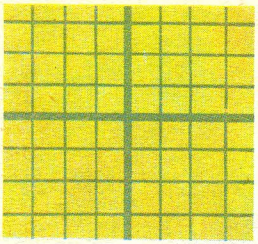


donde está situado un observatorio al servicio de las embarcaciones. Su reloj le indica la hora de ese sitio en aquel momento. Su almanaque le muestra cómo es allí el cielo.

La posición de las estrellas en el firmamento que tiene ante sí el navegante, es diferente del que se contempla en Greenwich y parece como si hubiera descrito determinado ángulo. La magnitud de este ángulo le indica la distancia a la que está del sitio en que el meridiano de Greenwich cruza el paralelo por el que

navega. Esta información le permite fijar su posición. Luego, bastará que el navegante estudie su carta marítima (un mapa de los océanos con los paralelos y los meridianos marcados en él), y averiguará exactamente la posición en que se encuentra.

Por medio de un reloj y un almanaque náutico, un observador que sabe a qué distancia se encuentra del ecuador, puede determinar su posición con referencia al meridiano de Greenwich. Y con ello, conocer el punto exacto de la superficie de la Tierra donde está

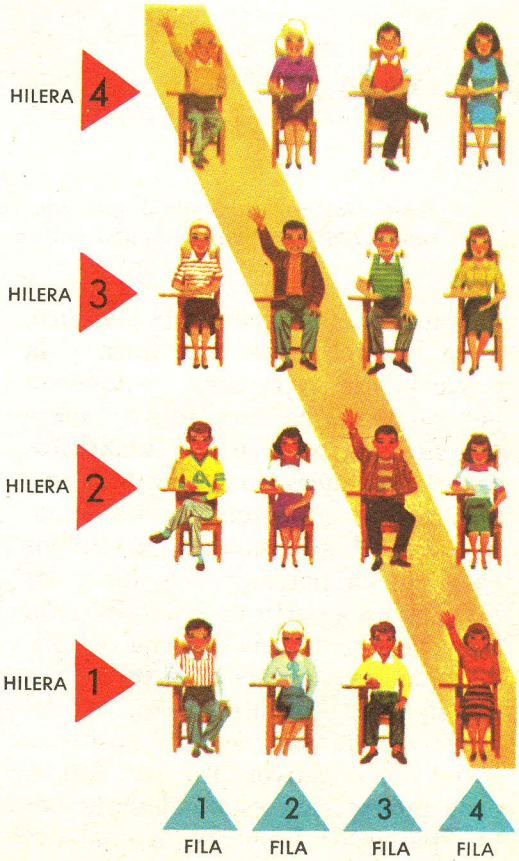


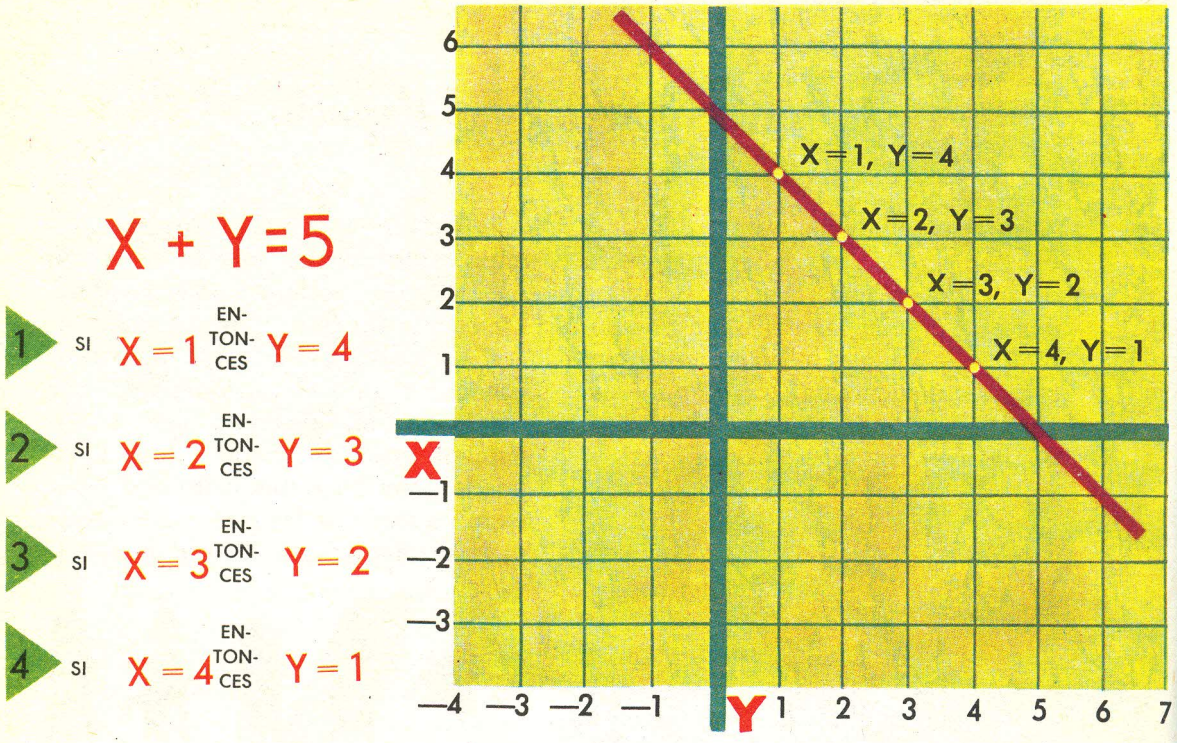
El Número en el Espacio

Muchas ciudades están divididas en manzanas, por calles que están dispuestas en una dirección y avenidas que cruzan las calles en ángulos rectos. Se puede localizar cualquier esquina mencionando dos números: el número de la calle, y el número de la avenida que la cruza. Así, si se desea encontrar a un amigo, por ejemplo, en la ciudad de Puebla, bastará decir: "Te encontraré cerca de la biblioteca en la avenida quinta y la calle cuarenta y dos."

Podemos localizar cualquier asiento en un salón de clases, mencionando dos números: el de la fila y el de la hilera. En el grabado, las filas están numeradas de izquierda a derecha y las hileras de adelante hacia atrás. El maestro dice: "Alcen la mano los alumnos cuyos números de fila y de hilera sumen cinco." Los lugares de los alumnos que levantaron la mano están representados por las parejas de números (4, 1), (3, 2), (2, 3) y (1, 4), en las que el primer número de cada pareja representa el número de la fila. Si designamos con la letra f el número de la fila y por h el número del asiento, podemos describir estos lugares por medio de la ecuación: $f + h = 5$. Observemos que los alumnos que han levantado la mano están colocados en línea recta. La ecuación describe los lugares que forman esta línea, la cual es una representación de las parejas de números descritos por la ecuación.

Lo anterior es un ejemplo de un importante descubrimiento realizado hace más de trescientos años por René Descartes, un gran matemático francés. Una ecuación con dos datos desconocidos puede representarse por medio de una línea (recta o curva), llamada *gráfica*. También, toda línea puede describirse mediante una ecuación. La rama de las matemáticas que se desarrolló a partir de este descubri-





René Descartes descubrió que una ecuación con dos incógnitas podía ser representada por medio de una gráfica, sobre la cual cada línea es una ecuación

miento, se llama *geometría analítica.*

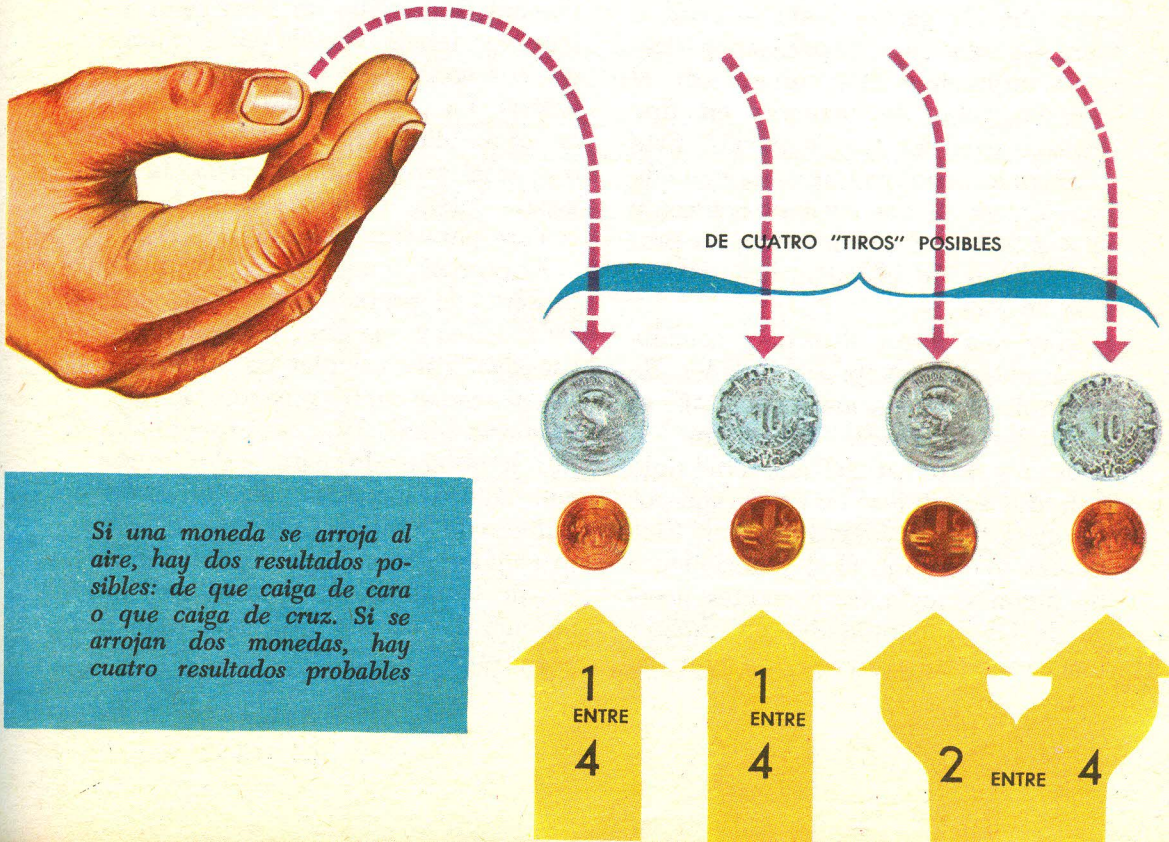
La relación entre una línea y la ecuación que representa, se muestra generalmente en esta forma: sobre una hoja de papel cuadriculado trazamos dos líneas que se cruzan, una vertical y otra horizontal, y las llamamos ejes. A continuación, dividimos cada eje en porciones iguales y los numeramos a partir de la intersección llamada *origen.* A la derecha del origen anotamos números positivos, y a la izquierda, negativos. Arriba del origen, anotamos números positivos, y debajo, negativos. En esta forma, cada intersección estará descrita por una pareja de números, la cual nos indicará si está a la derecha o a la izquierda, o encima o debajo del eje. A los números de la izquierda o de la derecha los llamamos x; a los superiores o inferiores los llamamos y. Los números fraccionarios representarán puntos que se encuentran entre las rayas de los cuadros.

He aquí algunos ejemplos de ecuaciones cuyas gráficas son líneas curvas: la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un *círculo.* La gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 25$ es una curva cerrada llamada *elipse.* La gráfica de $y = 4x - x^2$ es una *parábola,* o sea una curva similar a la que describe una pelota cuando se arroja hacia arriba y hacia adelante.

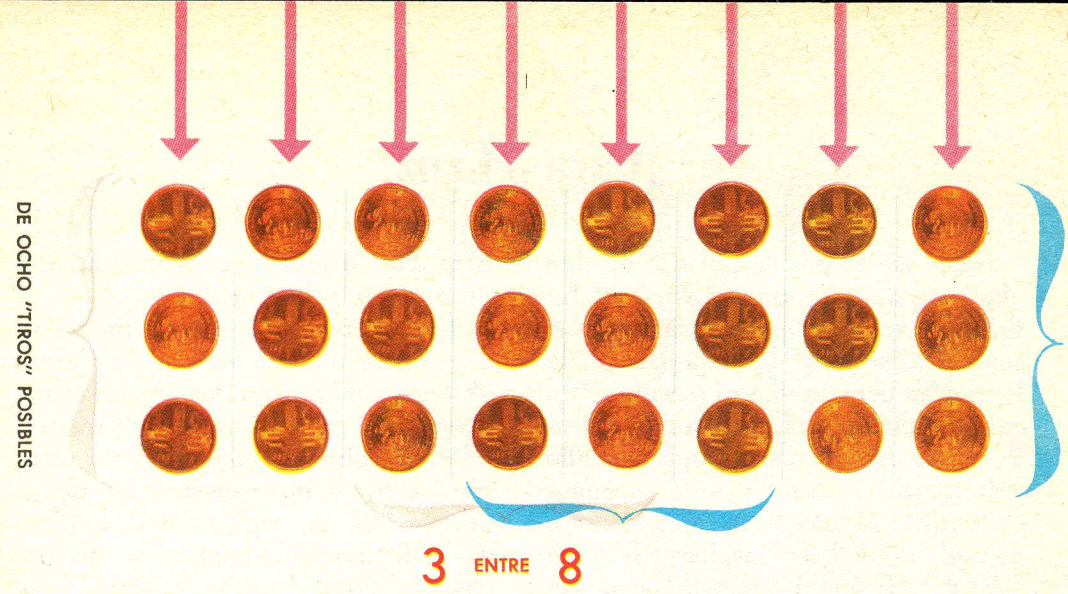
¿Cara o Cruz?

Calcular las probabilidades de que algo suceda es como adivinar el futuro. Y esto se hace aplicando el sentido común y la experiencia de lo que ha ocurrido en el pasado. Para comprender cómo funciona este cálculo, observemos un caso muy sencillo y tratemos de decir lo que sucederá al arrojar al aire una moneda. La moneda tiene dos caras, llamadas *cara* y *cruz*; cada una de ellas puede aparecer el mismo número de veces que la otra. El sentido común y la experiencia nos indican que, en un gran número de veces que se arroja al aire, las probabilidades son de que la mitad de las veces la moneda caiga de *cara* y la mitad de *cruz*. Dicho de otra manera, de cada dos "tiros" uno será *cara*. Por lo tanto, las probabilidades de obtener *cara* son de ½.

Si arrojamos al aire dos monedas, hay tres resultados posibles: podemos obtener dos *caras*, o dos *cruces*, o una *cara* o una *cruz*. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de estos resultados? Por supuesto que no es uno en tres. Si empleamos dos monedas (digamos un centavo y un décimo), vemos que en realidad hay cuatro posibles resultados. Arrojando el centavo primero y el décimo después, podremos obtener cara — cara, o cruz — cruz. La probabilidad de obtener dos cruces es de una a cuatro, o sea ¼. La probabilidad de obtener dos caras es también de ¼. La posibilidad de que salga una cara y una



Si una moneda se arroja al aire, hay dos resultados posibles: de que caiga de cara o que caiga de cruz. Si se arrojan dos monedas, hay cuatro resultados probables



cruz es de dos en cuatro tiros, o sea ½.

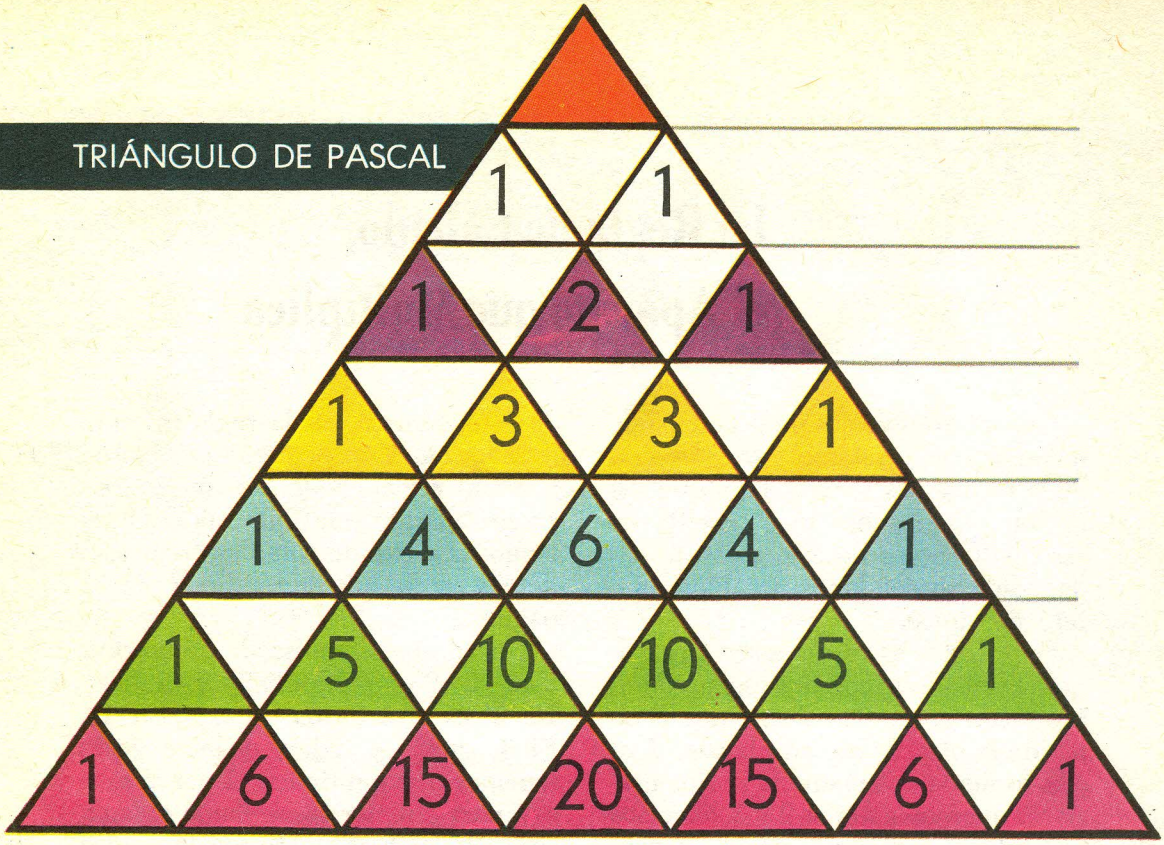
¿Cuáles son las probabilidades de que caigan dos caras y una cruz al arrojar al aire tres monedas? Para contestar esta pregunta, debemos observar primero que hay tres maneras de obtener dos caras y una cruz. Podemos obtener cara — cara — cruz, o cara — cruz — cara, o cruz —cara — cara. Comparemos este número con el número total de maneras en que pueden caer las tres monedas. Este número es ocho, ya que cada moneda puede caer de dos posibles formas, y $2 \times 2 \times 2 = 8$. Por lo tanto, las probabilidades de obtener dos caras y, una cruz es ⅜.

Hay una forma directa y sencilla para obtener las probabilidades de cualquier combinación especial. Es el *triángulo de Pascal.* Pascal fue un filósofo y matemático francés del siglo XVII, que se interesó en un tiempo por la ruleta y otros juegos de azar. Este interés lo condujo al descubrimiento de algunas reglas importantes acerca de las probabilidades de obtener una cara u otra al arrojar una moneda. Sus descubrimientos se describen en una formación triangular de números, que muestra claramente la posibilidad de obtener cara o cruz o cualquier combinación de ellas, en determinado número de tiros.

Cada hilera del triángulo se obtiene de la inmediata superior, de esta manera: se escribe un 1 en cada extremo, y debajo de cada par de números contiguos, se escribe la suma de ambos. La primera hilera representa las probabilidades de que salga cara o cruz al arrojar una moneda; la segunda hilera, para dos monedas; la tercera, para tres monedas, etc.

El primer número de una hilera representa la probabilidad de obtener todas caras y una cruz, y así en forma sucesiva. Para calcular las posibilidades al arrojar cuatro monedas, emplee la cuarta hilera. Para las probabilidades de obtener dos caras y dos cruces con cuatro monedas, use el tercer número de la hilera. Compare este número con la suma de todos los números de la hilera. La probabilidad de obtener dos caras y dos cruces es de 6 veces en 16, o sea ⅜.

TRIÁNGULO DE PASCAL



1 MONEDA	*Si se arroja una moneda, la posibilidad de que caiga de cara es 1 entre 2, ó sea ½*
2 MONEDAS	*Si se tiran dos monedas, la posibilidad de obtener dos caras es 1 entre 4; de conseguir una cara y una cruz, 2 entre 4, ó sea ½; de que salgan dos cruces, 1 entre 4*
3 MONEDAS	*Si se arrojan tres monedas, las posibilidades son: todas de cara, 1 entre 8; dos caras y una cruz, 3 entre 8; 2 cruces y 1 cara, 3 entre 8; todas de cruz, 1 entre 8*
4 MONEDAS	*Si se tiran cuatro monedas, hay 1 posibilidad entre 16 de que todas salgan de cara o todas de cruz; 4 entre 16 de obtener 3 caras y una cruz; ó 3 cruces y 1 cara; 6 entre 16 de obtener 2 caras y 2 cruces*
5 MONEDAS	*En cinco tiros, las posibilidades son: 1 entre 32 de que todas salgan cara, o todas de cruz; 5 entre 32 para 4 caras y 1 cruz, ó 4 cruces y 1 cara; 10 entre 32 para 3 caras, 2 cruces ó 3 cruces y 2 caras*
6 MONEDAS	*En seis tiros, las posibilidades son que todas salgan caras o todas cruces, 1 entre 64; para 5 caras y 1 cruz, o al contrario, 15 entre 64; 3 caras y 3 cruces, 20 entre 64*

La Regla de Cálculo, el Aparato que Multiplica

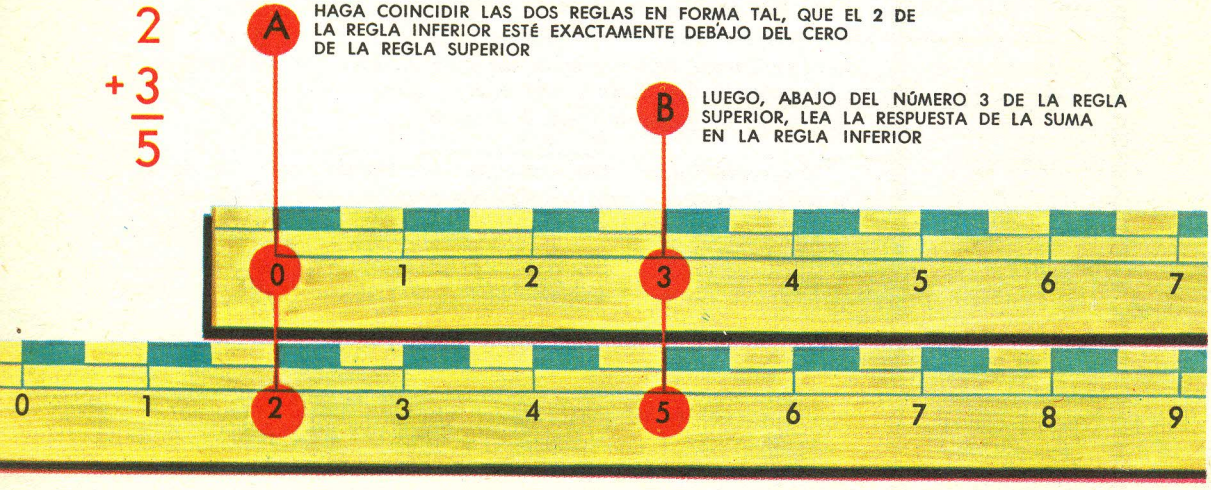
Cuando resolvemos un problema de matemáticas, tratamos de hacerlo de la forma más breve y fácil que sea posible. La manera más sencilla de resolverlo, no es hacerlo en su totalidad, sino sirviéndonos de algún aparato mecánico.

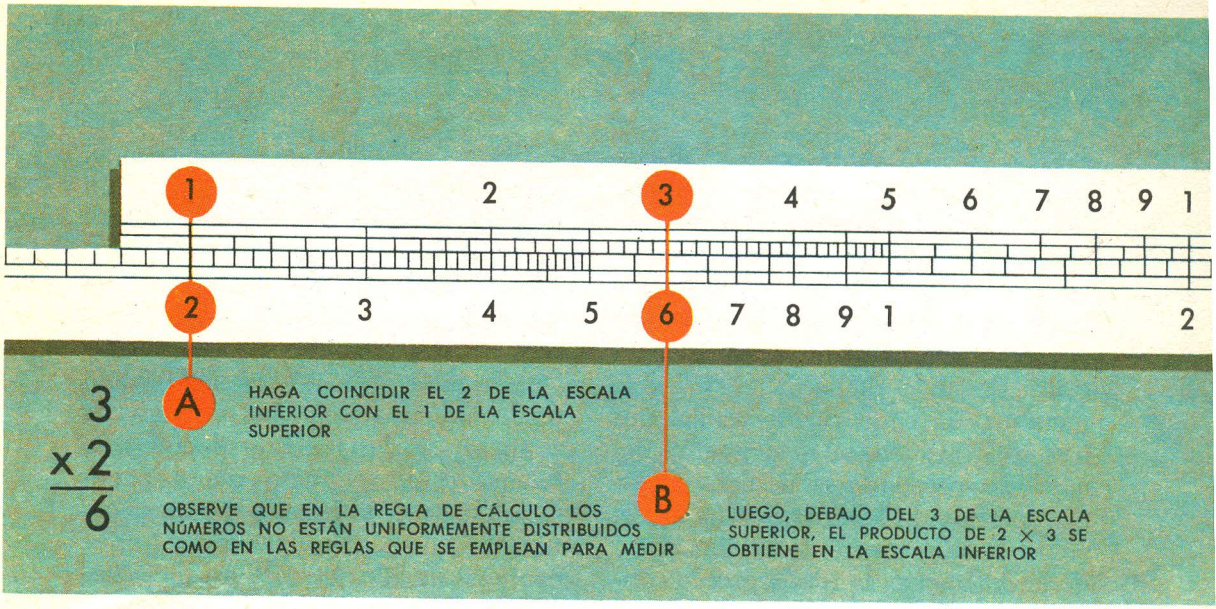
Se puede construir una sencilla máquina sumadora, con dos reglas comunes y corrientes. Se colocan una encima de la otra, borde con borde, y ya está formada una máquina rudimentaria. Si queremos sumar 2 y 3, hacemos coincidir el cero de la regla superior con el 2 de la regla inferior. Después, localizamos el 3 de la regla de arriba, y la respuesta aparecerá debajo de este número, en la regla inferior.

Si hacemos un pequeño cambio en nuestras reglas, podemos convertirlas en un aparato que multiplica. Obtenemos la clave de cómo ejecutar esto gracias a lo que aprendimos en la página 15.

Una forma simplificada de escribir $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ es 2^4. Como $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, 2^4 es otra forma de expresar 16. El 4, que nos indica cuántas veces tenemos que multiplicar 2 por sí mismo, para obtener 16, se llama el *logaritmo* de 16. En igual forma, 2^3 es otro modo de expresar 8, y el logaritmo de ocho es, en este caso, 3. Para multiplicar 16 por 8, multiplicamos 2^4 por

Un par de reglas comunes y corrientes se puede utilizar para sumar números





Una regla de cálculo suma logaritmos para efectuar operaciones de multiplicación

2^3. Lo anterior equivale a multiplicar $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ por $2 \cdot 2 \cdot 2$. Substituyendo la palabra *por*, obtenemos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, y el resultado, expresado en forma abreviada, es 2^7, ó sea 128, y su logaritmo es 7.

Observemos que, al multiplicar 16 por 8 para obtener 128, sumamos los logaritmos 4 y 3, para obtener 7. Esta es nuestra clave. Sabemos ya que dos reglas pueden sumar las distancias que se miden con ellas. Por lo tanto, haremos una regla especial en la que la distancia de cada número respecto del extremo de la regla sea igual al logaritmo del número. O sea, que la regla medirá logaritmos. Y sumar logaritmos equivale a multiplicar sus respectivos números. Una regla de este tipo recibe el nombre de *regla de cálculo*.

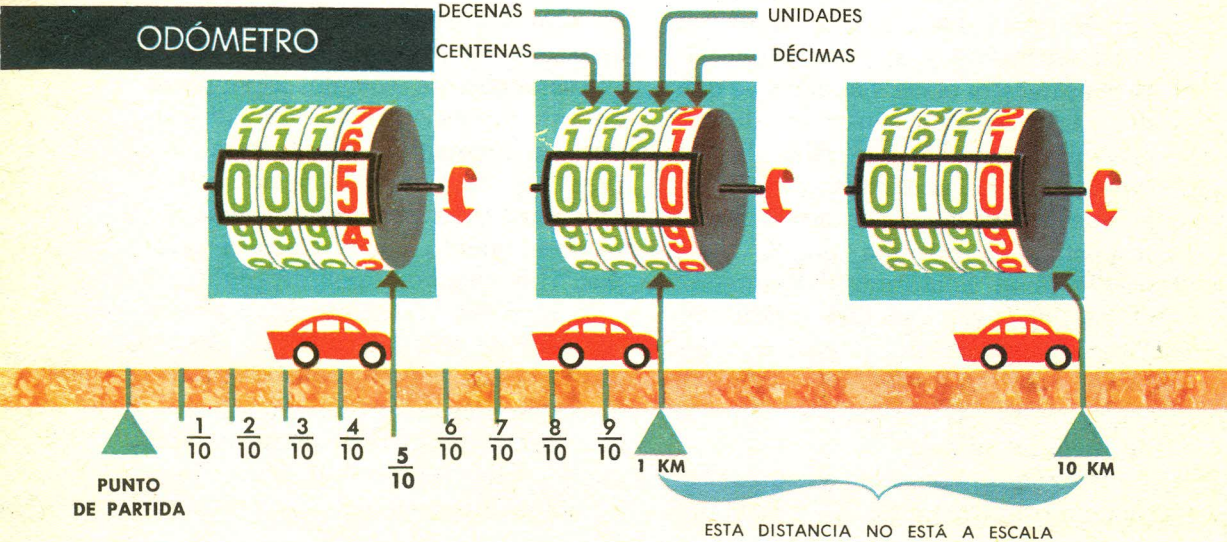
Dos reglas comunes y corrientes pueden restar números, así como también sumarlos. Por ejemplo, para restar 3 de 5, coloque el 3 de la regla superior coincidiendo con el 5 de la regla inferior. El cero de la regla superior indicará que la respuesta es 2. En forma similar, una regla de cálculo que multiplica números se puede usar en sentido inverso para efectuar la operación de división.

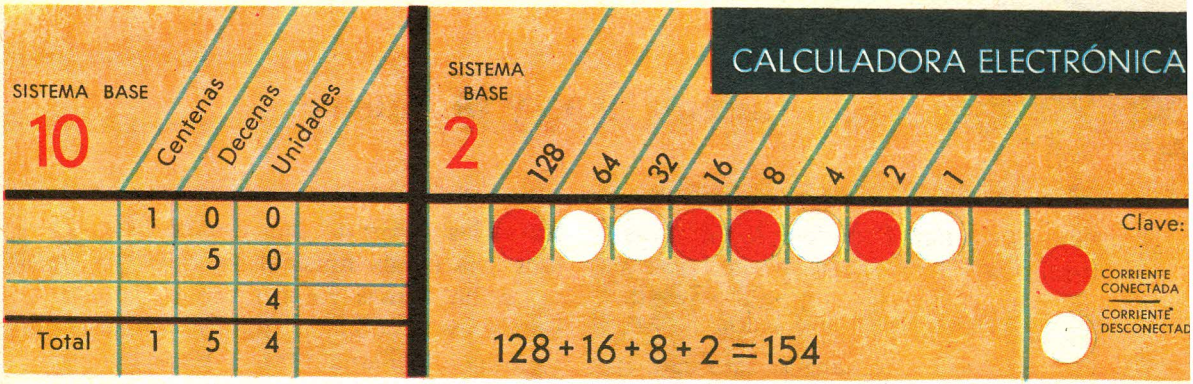
Las reglas de cálculo se emplean en muy diversos géneros de actividades: en ingeniería, arquitectura, imprenta, y, en general, son indispensables para toda persona que necesite frecuentemente hacer cálculos rápidos. Hay muchos tipos de reglas de cálculo. Además de la regla recta que se describió anteriormente, las hay de forma circular. Éstas constan de dos discos impresos, de tamaño distinto, que están montados sobre un eje común que les permite girar libre e independientemente.

Las Ruedas Contadoras

Otro aparato simple que se utiliza para contar es el *odómetro*, el cual se instala en un automóvil para indicar cuántos kilómetros ha recorrido el vehículo. Consta de una serie de ruedas colocadas una junto a otra. Llevan números impresos del 1 al 9 en el canto de cada rueda. Uno de estos números, en cada rueda, asoma por una abertura en el velocímetro del auto. La rueda de la derecha registra décimos de kilómetro. Cuando el vehículo ha recorrido la décima parte de un kilómetro, la rueda gira lo suficiente para hacer que aparezca el siguiente número en la ventanilla del odómetro. Después de nueve décimos de kilómetro, el número 9 aparece en la ventanilla. Al pasar el siguiente décimo, la rueda coloca el cero en su lugar y, al mismo tiempo, hace que gire la rueda próxima un espacio. El objeto de este movimiento es cambiar diez espacios de la primera rueda por un espacio de la segunda. A su vez, la segunda rueda, después de completar una vuelta, cambia diez espacios por un espacio de la tercera rueda. Así, mientras la primera rueda registra décimos de kilómetro, la segunda rueda cuenta kilómetros, la tercera marca decenas de kilómetros, la cuarta indica centenas de kilómetros, y así sucesivamente. La mayoría de las máquinas calculadoras de oficina funcionan de manera semejante a los odómetros. Son simples máquinas de contar, que suman números como las personas suman con los dedos. Cuentan el primer

Los automóviles tienen un pequeño aparato contador en el tablero, llamado odómetro, el cual mide la distancia que el vehículo recorre y la expresa por medio de números situados en discos giratorios





Las calculadoras electrónicas funcionan sumando dos cifras juntas a gran velocidad. Envían y cortan impulsos de corriente eléctrica a una serie de circuitos, formando números de varias cifras en grupos de dos

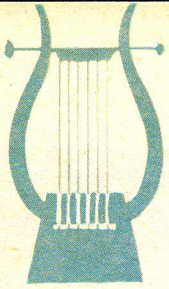
número, y luego, empiezan en donde el primer número se quedó. Multiplican sumando el mismo número varias veces. Para multiplicar 4 por 5, por ejemplo, una calculadora suma 5 + 5 + 5 + 5

Las máquinas computadoras funcionan electrónicamente; son las más rápidas. También son máquinas que cuentan, sólo que, en vez de tener series de ruedas giratorias, están provistas de series de circuitos electrónicos. Llevan la cuenta interrumpiendo y estableciendo la corriente eléctrica dentro de los circuitos. Así como en el odómetro una rueda pasa la cuenta a la siguiente, haciéndola girar, en las computadoras un circuito pasa la corriente a otro circuito contiguo, mediante impulsos de electricidad.

Cada rueda del odómetro tiene diez divisiones; por tanto, este aparato forma números de varias cifras en grupos de diez. Cada circuito en una computadora electrónica sólo tiene dos posiciones, por lo que los números que forma son de varias cifras, en grupos de dos. Aunque esto parece una forma muy lenta de contar, las computadoras funcionan a alta velocidad, porque la corriente eléctrica viaja casi tan rápidamente como la luz.

Las computadoras que forman números de varias cifras en grupos de dos, escriben los números en una forma especial. Para nosotros, los números del 1 al 10 significan un grupo de diez, y para la computadora, el dígito 1 del número 10 expresa un grupo de *dos*. En su sistema de escritura, conocida como *numeración binaria*, el 10 significa *dos*; el 11 se escribe *tres*, y el 100 *cuatro*.

El odómetro, la calculadora y la computadora electrónica reciben el nombre de *máquinas digitales*, porque ejecutan todos sus cálculos con los números dígitos. Existe otro tipo de aparato que mide, en vez de contar. Este aparato transforma primero los números en medidas, como la longitud, el ángulo y las unidades de la corriente eléctrica. La regla de cálculo es un ejemplo de este tipo de aparato.

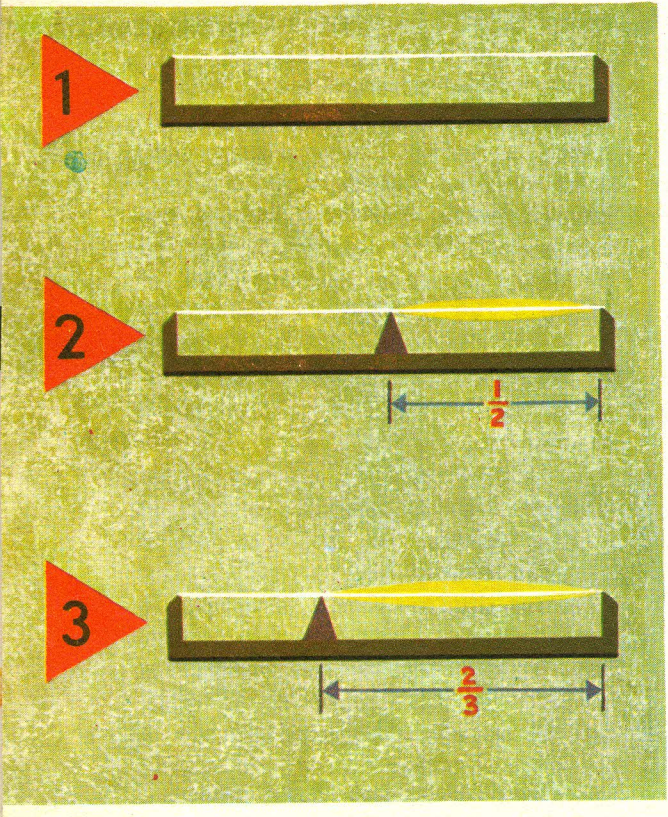


Las Matemáticas y la Música

Una nota musical es producida por una vibración. Por ejemplo, si se estira una cuerda y se pone tensa y después se puntea, vibrará y producirá un sonido. Cómo suene la cuerda, dependerá del número de vibraciones que ésta produzca. El número de vibraciones por segundo se llama *frecuencia* de la nota. Cuando una canción u obra musical se escribe, generalmente está compuesta de una familia de notas llamada *escala*. Para comprender cómo se relacionan entre sí las notas de una escala, hagamos una escala musical.

La nota más importante de una escala es aquella en que la canción termina. Se llama *tónica*. Escojamos como tónica la nota que se produce al vibrar una cuerda 256 veces por segundo. A esta nota la llamamos *do*. Si cortamos la cuerda a la mitad, vibrará dos veces más aprisa. La nota que producirá esta cuerda más cor-

La nota que produce una cuerda de violín depende del número de veces que ésta vibre

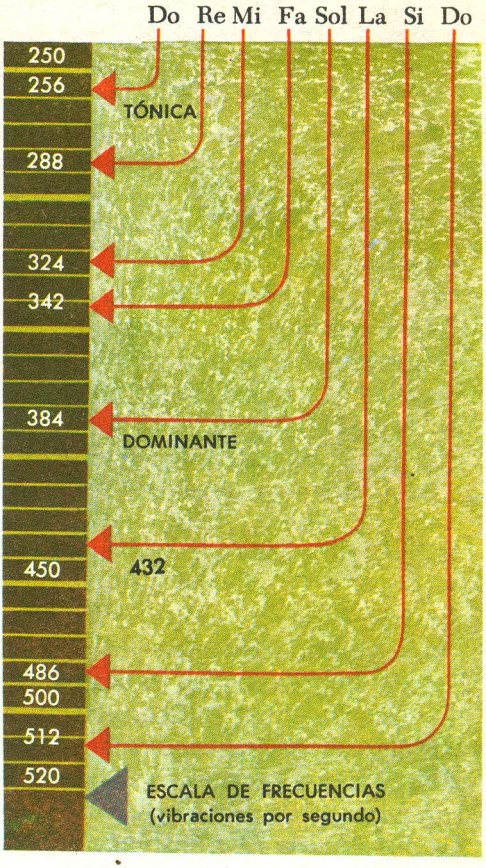


ta también se llama *do*. Su frecuencia es de 512 vibraciones por segundo. La frecuencia de 256 es el doble de 128, el que a su vez es el doble de 64, etc. Damos el mismo nombre a estas notas, porque pensamos en ellas como una misma nota, pero tocadas a diferentes "niveles".

Hagamos vibrar ahora una cuerda cuya longitud sea de las dos terceras partes de la cuerda original. La nota que se produce es la *pariente* más cercana de la tónica. A esta nota la llamamos *dominante*. Su frecuencia es ⅔ veces mayor que la frecuencia de la tónica. *Una escala es una familia de notas en la que cada nota es la dominante de otra nota en el grupo de notas.* Para encontrar la dominante de cualquier nota de la escala, multiplicamos su frecuencia por ⅔, ó por 1½.

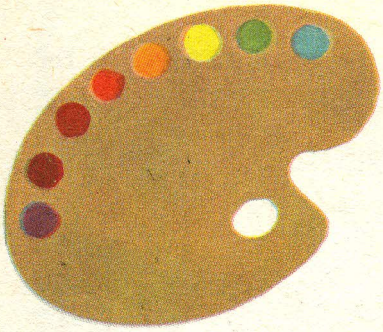
Al multiplicar una y otra vez por ⅔ obtenemos una serie de notas, cada una de las cuales es la dominante de la que le precede. Estas notas se llaman *sol, re, la mi* y *si*. Al dividir 256 entre ⅔, obtenemos 171, la frecuencia de la nota *fa*, de la cual *do* es la dominante. Estas notas forman la escala de *do*.

Empezamos con la nota *do* cuya frecuencia es 256. El *do* siguiente tiene, a su vez, una frecuencia de 512. Podemos obtener todos los tonos de la escala que se encuentran entre estos dos límites, porque cuando la frecuencia de una nota es demasiado alta, podemos dividirla a la mitad, y obtener otra nota igual, pero de frecuencia menor. La frecuencia de *sol* no es demasiado alta, así que la mantenemos. Todas las demás notas, excepto *fa*, son demasiado altas, así



Podemos producir el mismo tono a diferentes "niveles", acortando por la mitad o duplicando la longitud de la cuerda de los instrumentos

que dividimos las frecuencias entre dos, repetidamente, hasta que la frecuencia quede entre 256 y 512. La frecuencia de *fa* es demasiado baja, así que habrá que duplicarla. Ahora, arregladas las notas en orden de frecuencia, formamos una "escalera" de notas llamada *escala* de *do* mayor, y cuyo orden es: *Do* (256), *re* (288), *mi* (324), *fa* (342), *sol* (384), *la* (432), *si* (486) y *do* (512). Este es el orden de las teclas blancas de un piano.

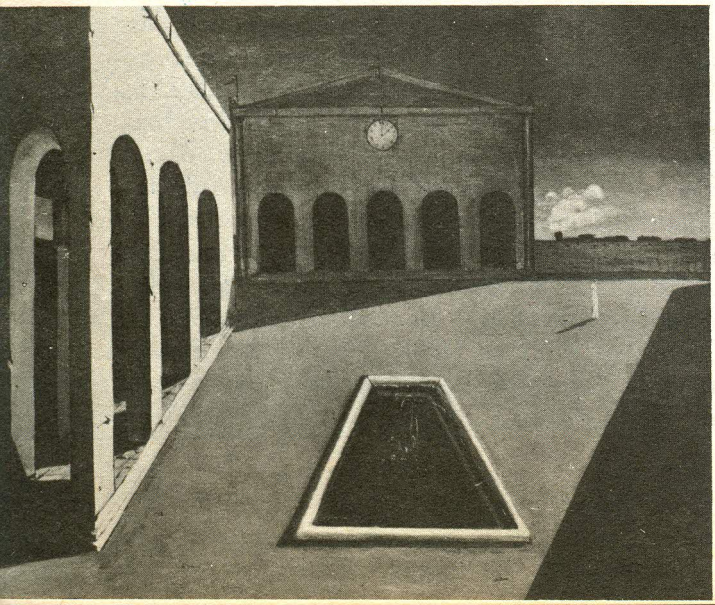


Las Matemáticas y el Arte

Pintura egipcia antigua trazada, sin aplicar la perspectiva

Comparemos las dos ilustraciones de esta página. La de la parte superior es una antigua pintura egipcia. Las figuras que allí aparecen se ven planas. Es difícil decir qué partes de la pintura están más cerca o más lejos del observador. El grabado de la parte inferior es una pintura de Chirico, un artista italiano. Los edificios tienen relieve. También podemos apreciar que algunos son más altos que otros, y que algunos parecen más lejanos. Además, se observa que hay un gran patio que se extiende, alejándose del observador. El espacio en el cuadro de Chirico es mucho más real que en la pintura egipcia, porque el pintor italiano empleó las matemáticas al

Adquirida por donación de la señorita Lillie P. Bliss, Colección del Museo de Arte Moderno, Nueva York



En esta obra "Delicias del Poeta", de Chirico empleó la perspectiva para lograr el efecto de profundidad y la distancia

hacer el bosquejo de su obra en tela.

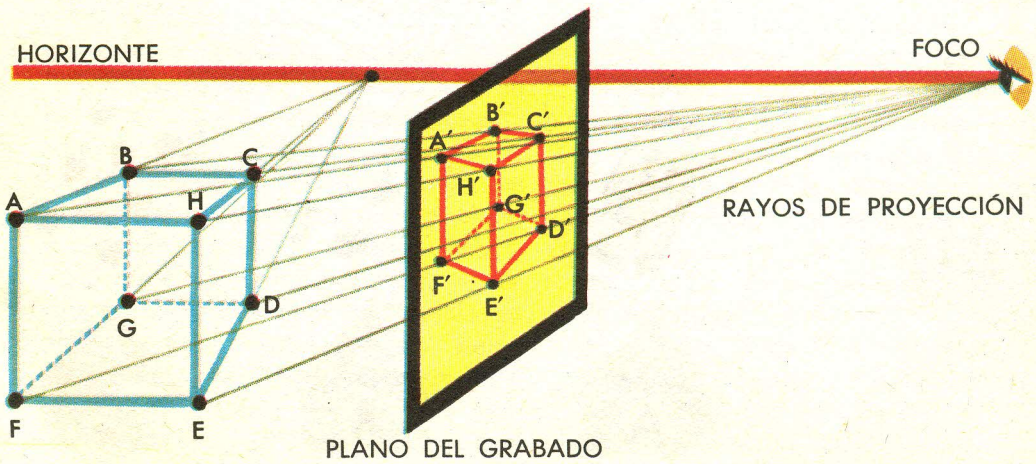
Alberto Durero, el gran artista alemán, expresó: "La geometría es el cimiento adecuado de la pintura." Para hacer que un cuadro parezca real, el pintor tiene que pensar en su tela como si fuese una ventana, a través de la cual mira lo que está más allá de ella. Razona de este modo: "Cada punto de la escena envía un rayo de luz hacia la persona que la está mirando. Estos rayos de luz pasan por la ventana que está entre el ojo y la escena. El sitio donde el rayo de luz cruza la ventana, es el lugar en el que el punto de donde procede aparecerá en el cuadro." El conjunto de rayos que van de la escena al ojo se llama *proyección*. La imagen formada donde la ventana cruza la proyección se llama *sección*. Imaginar cómo se verá el corte, es un problema de *perspectiva*. Las reglas de la perspectiva fueron establecidas con la ayuda de la geometría.

En el cuadro de Chirico apreciamos cómo aplicó dos de las reglas de la perspectiva: entre más lejos esté un objeto, más pequeño aparecerá. Las líneas paralelas que se pierden en la distancia, como las vías de un tren, parece como si llegaran a un punto.

Hay muchos puentes que unen las matemáticas con el arte. He aquí cómo las fracciones de Fibonacci (página 17) sirven de puente: No todos los rectángulos son agradables a la vista. Hay formas de rectángulos placenteras, en las cuales la razón de la anchura a la longitud recibe el nombre de *media dorada*. Las fracciones de Fibonacci se aproximan a esta razón. Entre más grande sea una fracción en la serie, estará más próxima a la *media dorada*.

Las matemáticas han sido de gran utilidad al arte mediante la perspectiva. Y el arte ha pagado su deuda, porque el estudio de la perspectiva condujo al desarrollo de una nueva rama de las matemáticas, llamada *geometría proyectiva*.

Las líneas paralelas dan la impresión de que se concentran en un punto al alejarse del observador

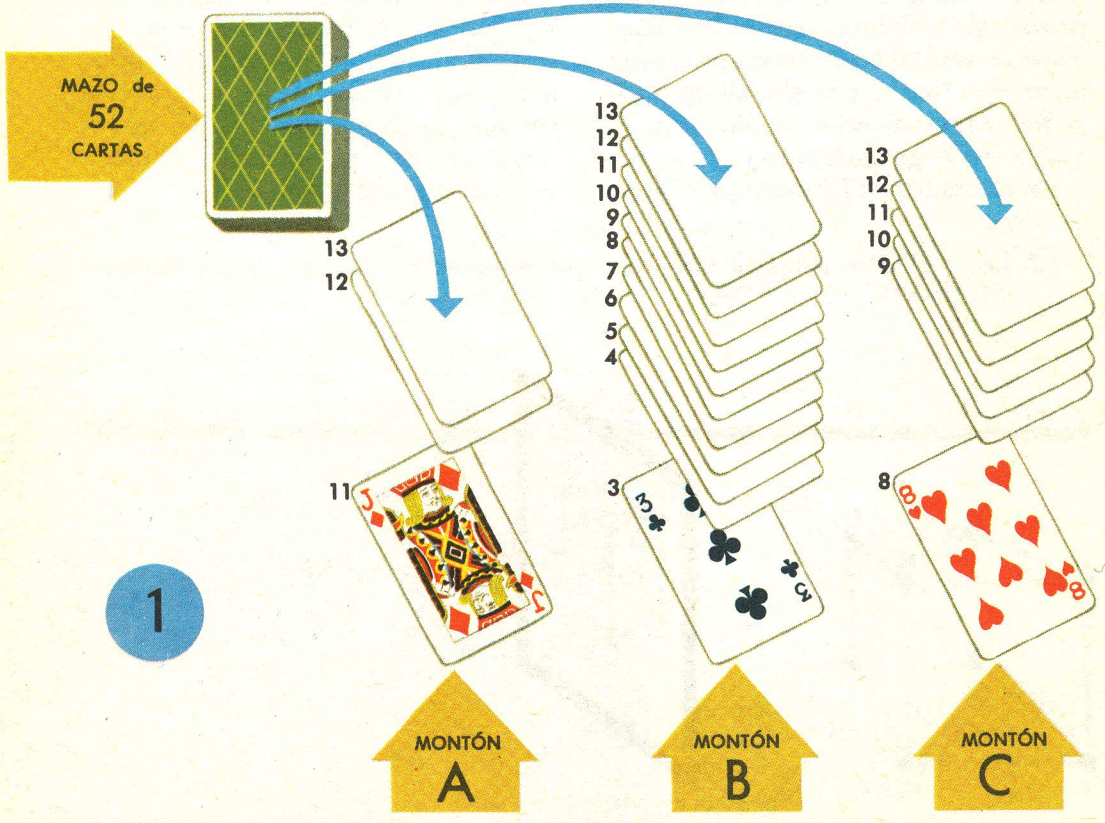


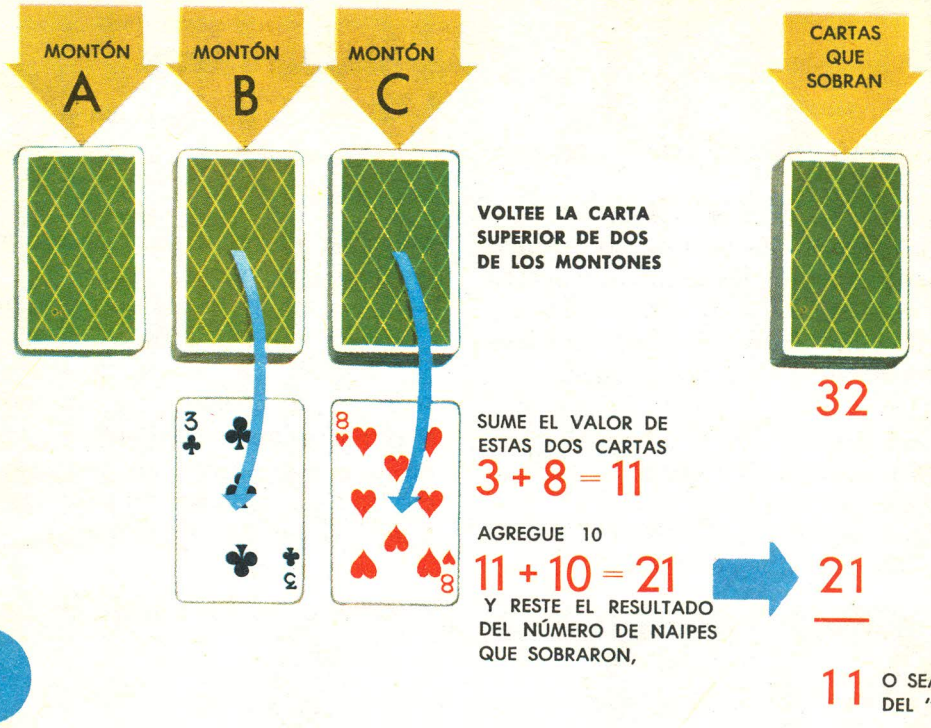
El Número en los Naipes

Hay muchos trucos de naipes que se pueden efectuar aplicando las matemáticas. El que a continuación presentamos es sencillo, aunque parece muy misterioso.

Utilice una baraja de 52 cartas y barájelas perfectamente. Pida a alguna persona que separe la baraja en tres montones, mientras da usted la espalda. Quien separe las cartas deberá seguir estas instrucciones:

Que ponga la primera carta con la figura hacia arriba y empiece a contar a partir del número de esa carta, advirtiéndole que el as vale uno, el "jack" once, la reina doce y el rey





2

Hay muchas "suertes" con naipes que se pueden hacer matemáticamente. En la que se describe los "jacks", reinas y reyes valen 11, 12 y 13, respectivamente, y los ases 1

trece. Que cuente más cartas sobre la primera hasta que llegue a trece. Si la primera carta es seis, por ejemplo, contará: siete, ocho, nueve, diez, once, doce y trece. Al llegar a trece, habrá puesto siete cartas encima de la primera. Si la primera carta es un rey, el cual tiene el valor de trece, ya no pondrá más cartas encima. Que vuelva el montón con las figuras hacia abajo y empiece un nuevo montón, contando hasta trece. Que repita el procedimiento hasta que haya tres montones sobre la mesa, con las figuras hacia abajo. Pida las cartas que sobraron y cuéntelas. Procure no olvidar este número. Pida a otra persona que voltee la carta de encima de dos de los tres montones. Entonces, dirá usted, sin verla, cuál es la carta que está encima del otro montón.

Para "adivinar" la carta, se hacen los siguientes cálculos: se suman los valores de las cartas que se han vuelto y se añade diez al resultado; luego, se resta el número de cartas que sobraron. Por ejemplo, si las cartas que se voltearon fuesen un 3 y un 8, y el número de las cartas que sobraron fuese 32, se suman $3 + 8 + 10 = 21$. Luego, se resta 21 de 32 y se obtiene 11. Ésta es la respuesta. Así se "adivina" que la carta que está encima del tercer montón es un "jack".

Q.E.D.

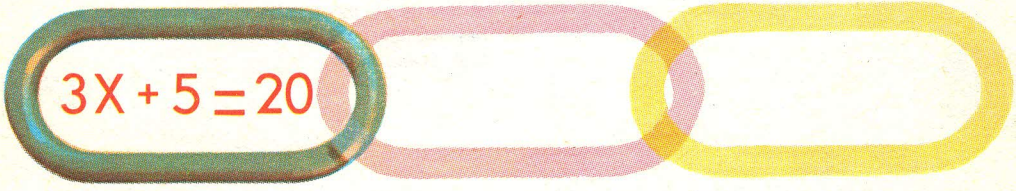
El Razonamiento en las Matemáticas

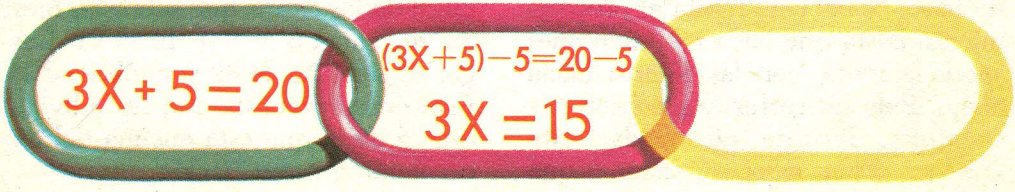
(quod erat demostrandum)

Se pueden hacer muchas afirmaciones acerca de los números y acerca del espacio. Algunas serán ciertas, y otras serán falsas. Los matemáticos se dedican a averiguar cuáles son ciertas y, además, a probar que lo son. Para lograrlo, siguen las reglas de la *lógica*, es decir, la ciencia del razonamiento ordenado y preciso.

Un tipo de demostración que a menudo se emplea en matemáticas es el llamado *razonamiento en cadena*. En este tipo de comprobación, llegamos al resultado mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales conduce al siguiente, como los eslabones de una cadena. Utilizamos este tipo de razonamiento, por ejemplo, al resolver una ecuación como $3x + 5 = 20$. Nuestro problema en este caso es averiguar el valor de x, para que la igualdad sea cierta.

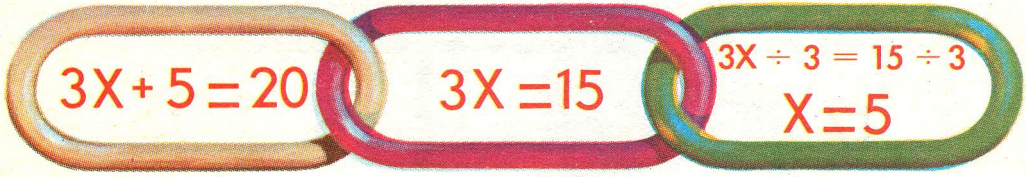
La ecuación expresa que el número que representa $3x + 5$ y el número 20 son iguales. Este es el primer eslabón de la cadena. Lo unimos al segundo eslabón mediante la ayuda de una regla que sabemos que es cierta. Esta regla nos dice que, si restamos el mismo número a números iguales, obtenemos resultados iguales. Por lo tanto, restemos 5 a ambos números, y nuestra ecuación queda como $3x = 15$. Este es el segundo eslabón de la cadena. Lo unimos a un tercer eslabón aplicando otra regla que también sabemos que es cierta. Esta regla expresa que si dividimos números iguales entre el mismo número, se obtienen resultados iguales. Por lo





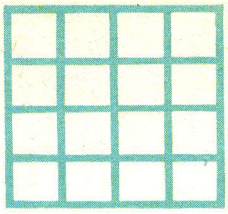
tanto, dividimos entre 3 y llegamos al resultado: $x = 5$. Este es el tercer eslabón de la cadena. Los tres eslabones expresan que si $3x + 5 = 20$, entonces x es igual a cinco.

Hay otra forma de comprobar si lo que afirmamos es cierto, en la que iniciamos nuestro razonamiento a partir del resultado. Es el procedimiento de *eliminación*. En éste, primero hacemos una lista de resultados, escogidos de modo tal que estemos seguros de que uno de ellos es el verdadero. A continuación, eliminamos todas las afirmaciones, excepto una, probando que son falsas. Y la afirmación que no podamos eliminar será la verdadera.



He aquí un ejemplo de razonamiento por eliminación: supongamos que hay más de doce personas en una habitación. Probaremos que por lo menos dos de ellas cumplen años el mismo mes. Hacemos primero una lista de dos aseveraciones. 1) Por lo menos dos de las personas que están en la habitación cumplen años el mismo mes. 2) No hay dos personas en la habitación que cumplan años el mismo mes. Estamos seguros de que alguna de estas dos aseveraciones tiene que ser cierta. Si la aseveración número dos fuera cierta, las personas que están en la habitación cumplirán años en meses *diferentes*. Pero si hay más de doce personas allí, y sus cumpleaños son en meses diferentes, esto sería tanto como afirmar que hay más de doce meses diferentes. Y esto es imposible, ya que sólo hay doce meses. Por lo tanto, debemos eliminar la segunda aseveración. Ahora estamos seguros de que la número uno es la cierta, porque es la única que quedó.

Existe un tercer tipo de comprobación, en la cual una teoría se comprueba en dos pasos. Primero, se aplican las leyes de la probabilidad, para sacar conclusiones de la teoría. Luego, estas conclusiones se comparan con los resultados de una serie de experimentos. Se determina la *probabilidad* de que la teoría sea cierta, analizando cuán bien se ajustan los resultados a las conclusiones. Supongamos, por ejemplo, que un jugador apuesta que al arrojar una moneda cinco veces al aire siempre caerá de cara. Según la ley de las probabilidades, cinco caras sucesivas ocurrirán una vez cada 32 ocasiones en que se arroje al aire la moneda. Observemos al jugador arrojar la moneda. Cada vez que lo haga, será un intento o experimento. Supongamos que la arrojó 300 veces, y que de ellas, 150 cayeron de cara. Según lo anterior, los resultados de los experimentos no concuerdan con las conclusiones de la teoría. Y de esto deducimos que la teoría es probablemente falsa.



Los Cuadrados Mágicos

El arreglo de números que aparece en el grabado inferior recibe el nombre de cuadrado mágico de "cinco por cinco". En él se emplean números enteros del 1 al 25. Si se suman los números de cualquier hilera, columna o de las diagonales principales, siempre se obtendrá la misma suma.

Utilicemos los números del 1 al 9 para hacer un cuadrado mágico de "tres por tres". Si los números están bien ordenados, las hileras, las columnas y las diagonales principales tendrán por resultado la misma suma.

Sumar *todos* los números del 1 al 9 equivale a obtener el noveno número triangular. Si aplicamos la regla de la página 13, multiplicamos 9 por 10 y luego dividimos entre dos, el resultado es 45. Esta será la suma de todos los números. Como están dispuestos en tres hileras, encontramos que la suma de una hilera será dividiendo 45, la suma de todas las hileras, entre 3. Por lo tanto, cada hilera deberá sumar 15.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

La Aplicación de las Matemáticas hoy día

Las matemáticas son parte de nuestras actividades diarias. Las amas de casa emplean las matemáticas cuando van de compras. Comparan los precios, calculan el importe y cuentan el dinero que les dan de cambio.

Los contadores utilizan las matemáticas para llevar el registro de los ingresos y de los egresos.

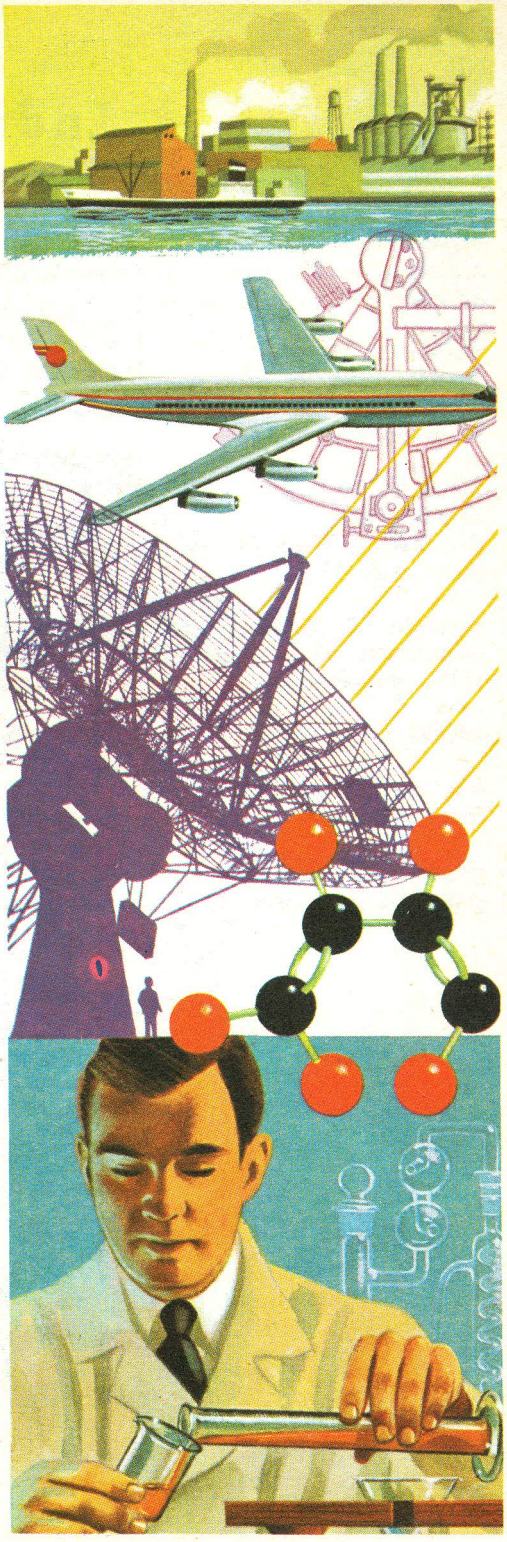
Los torneros usan las matemáticas para planear sus trabajos. Deben medir y calcular cómo colocar sus herramientas de corte para tornear las piezas, dándoles la forma y dimensiones requeridas.

Los pilotos aplican las matemáticas para trazar sus rutas. Deben calcular las distancias y las direcciones para volar de un aeropuerto a otro.

Los astrónomos se valen de las matemáticas para averiguar las distancias que nos separan de los astros. Utilizan fórmulas que les permiten explicar cómo se formaron las estrellas, por qué brillan, y los cambios que en ellas se producen.

Los físicos se sirven de las matemáticas para explorar los misterios del átomo. Sus experimentos les proporcionan datos, las ecuaciones les permiten relacionarlos y esos datos los conducen a nuevas invenciones.

Así, en distintos modos, las matemáticas han moldeado la civilización, tal como la conocemos actualmente.



Indice

álgebra, 7, 31, 32
ángulo recto, 18
aritmética, 7

círculo, 22, 23
circunferencia, 22
cono, 30
cuadrado mágico, 52

Descartes, 35
diámetro, 22
dodecaedro, 26-28, 30
dominante, 45

ecuación, 32, 35, 50
eliminación, 51
escala musical, 45
esfera, 30
estrella polar, 33, 34

fracciones, 17
frecuencia, 44, 45

geometría, 7
geometría proyectiva, 47
gráfica, 36
Greenwich, 33, 34

hexaedro, 26, 28
hexágono, 25, 29
hipotenusa, 20, 21

icosaedro, 26, 28, 30

logaritmo, 40, 41
lógica, 50

máquinas calculadoras, 42, 43

navegación, 33, 34
nota musical, 44, 45
números arábigos, 8, 9
números cuadrados, 13, 14, 21
números cúbicos, 14, 15
números de Fibonacci, 17
números impares, 14
números primos, 10, 11
números rectangulares, 10, 12, 13
números triangulares, 12, 13

octaedro, 26, 27, 30
odómetro, 42, 43

pentágono, 25
perspectiva, 47
pi, 22, 23
polígono, 24, 25, 26
probabilidad, 37, 38, 51
proyección, 47

razonamiento en cadena, 50
regla de cálculo, 40, 41

sección, 47
sólido regular, 26, 27, 28

teorema de Pitágoras, 21
tetraedro, 26
tónica, 44, 45
triángulo, 19, 20, 21, 24
Triángulo de Pascal, 39
triángulo equilátero, 24, 25
trigonometría, 7
trucos con naipes, 48, 49

La fotografía que aparece en la página 46 fue cortesía del Museo de Arte Moderno

LIBROS DE ORO DEL SABER

Libros de temas objetivos para jóvenes lectores

• Textos interesantes, instructivos y amenos • Cada libro ha sido revisado minuciosamente por un experto en la materia • Bellamente ilustrados en colores, con fotografías, dibujos, diagramas y cuadros sinópticos • Un extenso campo de fascinantes materias • Preparados bajo la dirección del doctor Herbert S. Zim, reconocida autoridad en la enseñanza de las ciencias.

Vea usted, en la página 55, la lista completa de los títulos de esta serie.

TÍTULOS DE ESTA COLECCIÓN

1 EL MUNDO DE LAS HORMIGAS
2 EL MUNDO DE LOS INSECTOS
3 LA LUNA
4 SUBMARINOS
5 ÁTOMOS
6 AVES DEL MUNDO
7 MOTORES
8 LA VIDA DE LOS REPTILES
9 LOS PLANETAS
10 MATEMÁTICAS
11 LA VIDA DE LOS PECES
12 ROCAS
15 LOS VIAJES DE LOS ANIMALES
16 ENERGÍA Y POTENCIA
17 LA VISIÓN
18 LAS REGIONES POLARES
19 VUELOS ESPACIALES
20 EL MAR
21 LOS PRIMEROS AUTOMÓVILES
22 LA HISTORIA DE LOS MAPAS
23 ANIMALES PREHISTÓRICOS
24 ANIMALES QUE VUELAN
25 MARIPOSAS Y PALOMILLAS
26 LAS GRANDES CONSTRUCCIONES
27 EL MAGNETISMO
28 EL CUERPO HUMANO
29 BALLENAS Y DELFINES

Sanborns
77-EN
SBEO
$25.00

ORGANIZACION EDITORIAL NOVARO, S. A.